

Anwendung IV. 19 Die Abbildung

$$[0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

ist eine Bijektion ~~mit~~ von $[0, 2\pi[$ nach

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}.$$

Wir überlassen dies als Übung mit dem folgenden Hinweis: unter Benützung der Identitäten in 3.46 (2), (3), (4)

genügt es zu zeigen, dass

$$[0, \pi/2[\longrightarrow \{ (x, y) \in K : \begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ 0 \leq y < 1 \end{array} \}$$

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$
bijektiv ist.

Ein effizientes Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten ist die Regel von l'Hospital. Sie stützt sich auf eine einfache Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange die wir nun behandeln.

Satz IV. 19 (Cauchy)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit:

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$

$$\text{und} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beachte: Man erhält den Satz von Lagrange
mit $g(x) = x$.

Beweis: Wende den Satz von Rolle auf

$$F(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

an:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) \\ &= f(a)g(b) - g(a)f(b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(b) &= f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a)) \\ &= -f(b)g(a) + g(b)f(a) \\ &= F(a). \end{aligned}$$

Nach Rolle gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$F'(\xi) = 0.$$

Dies beweist die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt aus dem Satz von Rolle, den falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ kann nach Rolle $g(b) = g(a)$ nicht gelten.



Satz IV.20 (l'Hospital^(*) 1696, Joh. Bernoulli: 1691/92)

Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

Falls

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} := \lambda$ existiert,

folgt
$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(*)

Guillaume - François - Antoine de L'Hospital,
Marquis de Sainte-Merme et du Montellier,
Comte d'Andremonts, Seigneur d'ouques".

Beweis: Für die Begriffe von rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert verweisen wir auf III. 10.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [b-\delta, b[.$$

Seien $b-\delta < u < v < b$, und für diese u und v sei $\xi \in]u, v[$ wie im Satz von Cauchy:

$$\frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dann folgt:

$$\left| \frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)} - \lambda \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Da diese Ungleichung insbesondere für alle $v \in]u, b[$ gilt, folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

dass

$$\left| \frac{f(u)}{g(u)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

und somit $\lim_{u \rightarrow b^-} \frac{f(u)}{g(u)} = \lambda.$ □

Wichtige Bemerkung IV.21 : Der Satz gilt

auch ~~falls~~

- falls $b = +\infty$
- falls $\lambda = +\infty$ oder $\lambda = -\infty$
- falls $x \rightarrow a^+$

Beispiele IV. 22

(1) Für $a > 0$ folgt aus IV. 12 (1), (2)

und l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x)}{a x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir Ableitungen höherer Ordnung im allgemeinen einführen. Wir wollen diesen Abschnitt mit einer Diskussion über Konvexität und deren Zusammenhang mit zweiter Ableitung beenden.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Def. IV.23

(1) f ist konvex (auf I) falls für alle $x \leq y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$

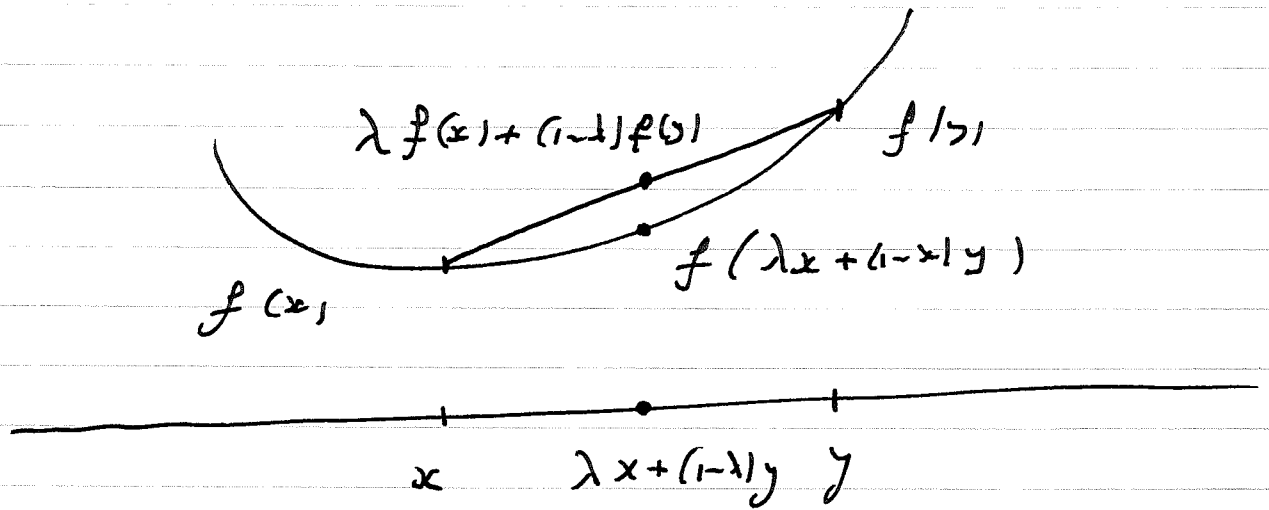
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

gilt.

(2) f ist streng konvex falls für alle $x < y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in]0, 1[$,

- 55 -

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$



Bemerkung IV.24 Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex.

Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt,

dass für alle $n \geq 1$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset I$

und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Lemma IV. 25 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige

Funktion ist genau dann konvex

falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \quad (*)$$

gilt.

Sie ist genau dann streng konvex
falls in $(*)$ strikte Ungleichheit gilt.

Beweis: Sei $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$,

also $\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$.

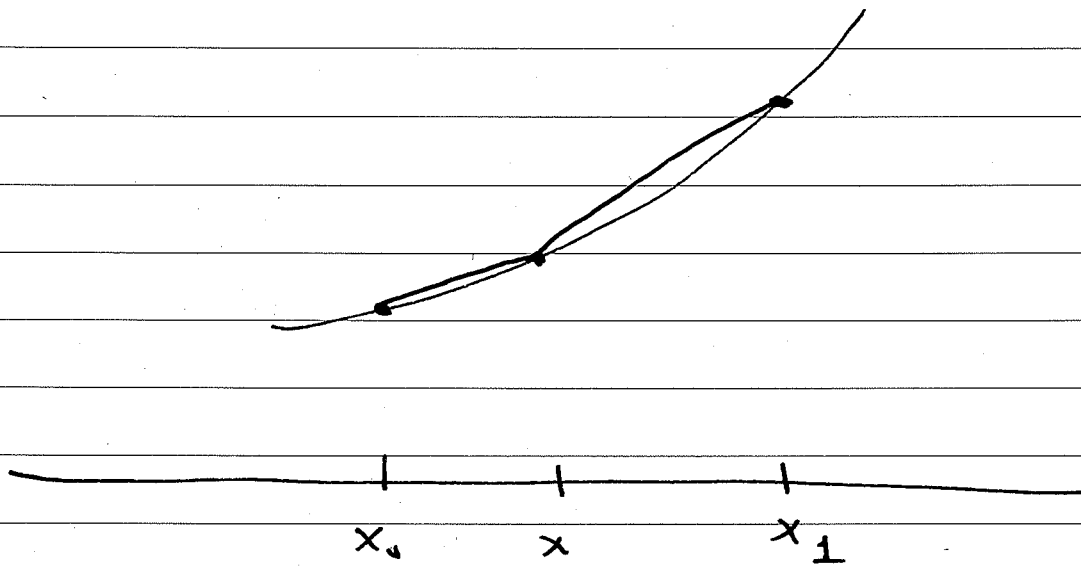
Dann ist

$$f(x) \leq \overbrace{\left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)}^{(1-\lambda)} f(x_0) + \overbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}^{\lambda} f(x_1)$$

äquivalent zu:

$$(x_1 - x_0) f(x) \leq (x_1 - x) f(x_0) + (x - x_0) f(x_1)$$

Bild zu 5c:



Mittels der Bemerkung $x_1 - x_0 = (x_1 - x) + (x - x_0)$

ist dies wiederum äquivalent zu:

$$(x_1 - x) (f(x) - f(x_0)) \leq (x - x_0) (f(x_1) - f(x))$$

also

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{(x_1 - x)}$$

Die Aussage betreffend strenge Konvexität folgt aus dem selben Argument. $\square$

Aus dem Satz von Lagrange erhalten wir relativ leicht:

Satz IV. 25

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar.

Die Funktion f ist genau dann

(streng) konvex falls f' (streng) monoton wachsend ist.

Beweis:

Wir beschränken uns darauf eine Implikation zu beweisen. Wir nehmen an, dass f' monoton wächst. Seien $x_0 < x < x_1$; dann gibt es nach dem Satz von Lagrange $\xi \in]x_0, x[$ und $\eta \in]x, x_1[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\eta).$$

Da nun $\xi < \eta$ folgt $f'(\xi) \leq f'(\eta)$

und somit
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Die Konvexität folgt dann aus Lemma IV. 25.

Strenge Konvexität folgt mit dem selben Argument aus der strengen Monotonie von f' .

□

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Falls f in $]a, b[$ differenzierbar ist und ihre Ableitung f' wiederum in $]a, b[$ differenzierbar ist, bezeichnet f'' (oder $f^{(2)}$) die Funktion $(f')'$. Die Funktion f'' nennt sich die zweite Ableitung von f und f ist zweimal differenzierbar in $]a, b[$.

Korollar IV. 26 Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$.

Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex falls $f'' \geq 0$ (bez. $f' > 0$) auf $]a, b[$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz IV. 25 und Korollar IV. 17. $\square$

Beispiel IV.27:

Für alle $n \geq 1$ und $x_1, \dots, x_n$ in $]0, \infty[$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Wir betrachten $f(x) = -\ln x$, dann

ist $f'(x) = -\frac{1}{x}$

und $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in]0, \infty[$.

Folglich ist f konvex und aus

Bemerkung IV.24 mit $I =]0, \infty[$ und

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ folgt:

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{n} \ln(x_i)}_{-\frac{1}{n} \ln(x_1 \cdots x_n)}$$

Woraus folgt:

IV.3. Höhere Ableitungen.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ so dass jedes $x_0 \in D$ Häufungspunkt der Menge D ist.

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D und f' ihre Ableitung; wir setzen $f^{(1)} = f'$.

Def. IV.28 (1) Für $n \geq 2$ ist f n -mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f .

(2) Die Funktion f ist in D n -mal stetig differenzierbar, falls sie n -mal differenzierbar ist und wenn $f^{(n)}$ in D stetig ist.

(3) Die Funktion f ist in D glatt
falls sie $\forall n \geq 1$, n -mal differenzierbar
ist.

Bemerkung IV.29 : Es folgt aus Korollar
IV.5, dass für $n \geq 1$, eine n -mal
differenzierbare Funktion, $(n-1)$ -mal
stetig differenzierbar ist.

Analog zu Satz IV.8 haben wir:

Satz IV.30 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. IV.28
 $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal
differenzierbar in D .

(1) $f+g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(2) $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und

$$-c3-$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Beweis:

(1) Einfache Induktion unter Benützung von IV.8 (1).

(2) Für $n=1$ gilt es nach IV.8 (2).

Sei $n \geq 2$, wir nehmen an, die Formel gilt für $n-1$. Dann folgt

$$(f \cdot g)^{(n)} = ((f \cdot g)^{(n-1)})'$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} f^{(j)} g^{(n-1-j)} \right)'$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left[f^{(j+1)} g^{(n-1-j)} + f^{(j)} g^{(n-j)} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$$

$$\begin{aligned}
 &= f^{(n)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right\} f^{(k)} g^{(n-k)} \\
 &\quad + f \cdot g^{(n)}
 \end{aligned}$$

Für $1 \leq k \leq n-1$ berechnen wir:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! (n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot k}{k! (n-k)!} + \frac{(n-1)! (n-k)}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)! (n-k+k)}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

und die Formel ist bewiesen.



Beispiele IV.31.6: Die Funktionen $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$.

(2) Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ glatt.

(3) $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt;

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad (\ln)''(x) = (-1)x^{-2}, \dots$$

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} x^{-n} \quad n \geq 1.$$