

(2) Polynome sind auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt.

(3)  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist glatt;

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad (\ln)''(x) = (-1)x^{-2}, \dots$$

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} x^{-n} \quad n \geq 1.$$

Satz IV.32 Sei  $] \subseteq \mathbb{R}$  wie in Def. IV.28

$n \geq 1$  und  $f, g : ] \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenz-

ierbar in  $]$ . Falls  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]$ , ist

$\frac{f}{g}$  in  $]$   $n$ -mal differenzierbar.

Bew.: Einfache Induktion über  $n$ .

Der Fall  $n=1$  folgt aus Satz 4.9. (3).

□

Analog erhalten wir auch für die

Verkettung :

Satz IV. 33 Seien  $E, D \subseteq \mathbb{R}$  Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist.

Seien  $f : D \rightarrow E$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$  mal differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$   $n$  mal differenzierbar, und:

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

Wobei  $A_{n,k}$  ein Polynom in den Funktionen  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$  ist.

Wir lassen den Beweis als Übung: es ist ein einfacher Induktionsbeweis.

Es gibt auch explizite Formeln für

$A_{n,k}$ , diese sind aber schwieriger zu beweisen. Hier als Beispiel die Drei

ersten Ableitungen von  $g \circ f$  :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$$

$$(g \circ f)^{(2)} = (g^{(2)} \circ f) f'^2 + (g' \circ f) f^{(2)}$$

$$(g \circ f)^{(3)} = (g^{(3)} \circ f) f'^3 + 3(g^{(2)} \circ f) f' f^{(2)} + (g' \circ f) f^{(3)}$$

### Beispiele IV. 34

(1)  $\tan$  ist auf  $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$   
glatt, sowie  $\cot$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

(2) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} ]0, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^a \quad \text{glatt.} \end{aligned}$$

(3)  $\arcsin : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$

$\arccos : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sind alle  
glatt.

- 68 -

Z.B. im Fall von  $\arcsin$ , wissen wir dass die Funktion auf  $] -1, 1 [$  differenzierbar ist mit Ableitung:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.19 (1))$$

Bemerke nun dass

$$\begin{array}{ccc} ] -1, 1 [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

Verknüpfung folgender glatter Funktionen

ist:

$$x \mapsto x^{1/2}$$

$$]-1, 1[ \longrightarrow ]0, 1[ \longrightarrow ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 1-x^2$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

und somit glatt.

#### IV. 4. Potenzreihen und Taylor

##### Approximation.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass, grob gesagt, konvergente Potenzreihen glatte Funktionen ergeben; die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht und wird durch eine schwächere Aussage (Taylor Approximation) ersetzt.

Satz IV. 35 Seien  $f_n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$

eine Funktionenfolge wobei  $f_n$  1-mal in  $]a, b[$  stetig differenzierbar ist  $\forall n \geq 1$ .

Wir nehmen an, dass sowohl die

Folge  $(f_n)_{n \geq 1}$ , wie  $(f'_n)_{n \geq 1}$

gleichmäßig in  $]a, b[$  konvergieren

(siehe 3.34) mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n := f$

und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n =: p$ .

Dann ist  $f$  stetig differenzierbar und  $f' = p$ .

Beweis: Nach Satz 3.33 sind  $f$  und  $p$  stetig. Es bleibt also nur  $f' = p$  zu beweisen.

Sei  $x_0 \in ]a, b[$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  so dass  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subseteq ]a, b[$  und  $(*)$   $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ .  
Sei  $N \geq 1$  so dass:

$$(*) \quad |f'_n(\xi) - p(\xi)| < \varepsilon \quad \forall \xi \in ]a, b[.$$

Sei nun  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , ~~mit~~  $x \neq x_0$ .

Nach Lagrange gibt es  $\xi_n \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

mit 
$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_n(\xi_n).$$

Für  $n \geq N$  folgt aus (\*\*):

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - p(f_n) \right| < \varepsilon$$

und aus (\*), dass

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - p(x_0) \right| < 2\varepsilon.$$

In dieser letzten Ungleichung können wir zum  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  übergehen und erhalten

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - p(x_0) \right| \leq 2\varepsilon.$$



Mithels Satz IV. 35 erhalten wir folgende fundamentale Eigenschaft von Funktionen die sich als Potenzreihen darstellen lassen:

Satz IV. 36 Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine

Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$  (siehe 3.39, 3.40).

Dann ist  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$

auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  differenzierbar

und  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-x_0)^{k-1}$

für alle  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ .

Durch wiederholte Anwendung von

Satz IV. 36 erhalten wir:



Korollar IV.37 Unter der Voraussetzung  
von Satz IV.35 ist  $f$  auf  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$   
glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

Beweis vom Satz:

Wir können  $x_0 = 0$  annehmen.

$$\text{Sei } f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k,$$

und  $0 < r < \delta$ . Nach Satz 3.40

konvergiert  $(f_n)_{n \geq 1}$  auf  $[-r, r]$

gleichmäßig gegen  $f$ . Nun ist

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k c_k x^{k-1}.$$

- 74 -

$$\text{Da } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k |c_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

$$= 1 \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

(Beispiel 2.14)

folgt, dass die Reihe

$$p(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

selben Konvergenzradius  $\rho$  hat.

Nach Satz 3.40 konvergiert  $(f'_n)_{n \geq 1}$  auf  $[-r, r]$  gleichmäßig gegen  $p$ .

Aus Satz IV.35 angewandt auf  $f$

$]-r, r[$  folgt dass  $f$  stetig diffenzierbar

ist und  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ ,

$\forall x \in ]-r, r[$ . □

Aus Korollar IV.37 folgt, dass falls eine glatte Funktion  $f$  in einem Intervall  $(-s, s)$  Summe einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit Konvergenzradius  $s$  ist, so folgt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Das nicht jede glatte Funktion Summe einer Potenzreihe ist folgt aus dem folgenden

Beispiel IV.38 (Cauchy 1823)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt

- 76 -

und  $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$ .

Da andererseits  $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ ,  
gibt es keine Potenzreihe mit positiven  
Konvergenzradien, die in  $(-5, 5)$  gegen  
 $f$  konvergiert.

Aus Satz IV.33 folgt, dass  $\forall k \geq 0$

$$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \quad \forall x \neq 0$$

wobei  $P_k$  ein Polynom ist.

Unter Benützung von:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} = 0 \quad \forall m \geq 0$$

folgt rekursiv mit der Annahme  $f^{(k)}(0) = 0$ :

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 0.$$

Glatte Funktionen lassen sich aber durch Polynome wie folgt approximieren.

Satz IV.34 Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  
und in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal differenzierbar.  
Für jedes  $a < x \leq b$  gibt es  $\xi \in ]a, x[$

mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Beweis: Der Beweis folgt einer Idee

von Cauchy. Seien

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

und

$$S_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dann gilt:  $R_n(a) = 0, R_n'(a) = 0, \dots, R_n^{(n)}(a) = 0.$

und:  $S_n(a) = 0, S_n'(a) = 0, \dots, S_n^{(n)}(a) = 0.$

Satz IV. 19 angewendet auf  ~~$f = R_n$~~   $f = R_n$   
und  $g = S_n$  ergibt

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{S_n(x) - S_n(a)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{S'_n(\xi_1)}$$

für ein  $\xi_1 \in ]a, x[$ .

Wir können jetzt weiterfahren und  
Satz IV. 19 auf  $f = R'_n$  und  $g = S'_n$   
anwenden und erhalten

$$\frac{R'_n(\xi_1)}{S'_n(\xi_1)} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(a)}{S'_n(\xi_1) - S'_n(a)} = \frac{R_n^{(2)}(\xi_2)}{S_n^{(2)}(\xi_2)}$$

"  
für ein  $\xi_2 \in ]a, \xi_1[$ .

Wir können diesen Prozess iterieren und  
erhalten

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{S_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})} \quad \text{für ein } \xi_{n+1} \in ]a, x[.$$

Nun ist  $\int_n^{(n+1)}(x) = 1$  und

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(k+1)}(x) \quad \text{woraus mit}$$

$$\xi = \xi_{n+1} \text{ folgt:}$$

$$R_n(x) = \int_n(x) f^{(k+1)}(\xi).$$

□

(Taylor Approximation).

Korollar IV.35 Sei  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig und in  $]c, d[$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Sei  $c < a < d$ . Für alle  $x \in [c, d]$  gibt es  $\xi$  zwischen  $x$  und

$a$  so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Anhand dieses Korollars können wir eine präzisere Aussage über lokale Extremalstellen einer  $(n+1)$ -mal differenzierbarer Funktion machen.

Korollar IV.36 Sei  $n \geq 0$ ,  $a < x_0 < b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar.

Annahme:  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ .

(1) Falls  $n$  gerade ist und  $x_0$  lokale Extremalstelle folgt  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$ .

(2) Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$  so ist  $x_0$  strikte lokale Minimalstelle.

(3) Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  so ist  $x_0$  strikte lokale Maximalstelle.



Beweis: Nach Korollar IV. 35 gilt  
es für alle  $x \in ]a, b[$  an  $f$  zwischen  
 $x$  und  $x_0$  mit

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(1) Für  $x \neq x_0$  folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Aus der Stetigkeit von  $f^{(n+1)}$  folgt  
insbesondere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = f^{(n+1)}(x_0)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = f^{(n+1)}(x_0).$$

Da  $x_0$  lokale Extremstelle für  $f$  ist  
und  $n+1$  ungerade, folgt dass

$\lim_{x \rightarrow x_0^+}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$  entgegengesetzte

Vorzeichen haben, woraus  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$  folgt.

(2) Sei  $n$  ungerade und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ .  
Aus der Stetigkeit von  $f^{(n+1)}$  folgt  
die Existenz von  $\delta > 0$  mit

$$f^{(n+1)}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Für  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  und  $\xi$  wie  
oben folgt

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Da  $n+1$  gerade ist folgt nun

$$\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad x \neq x_0:$$

$$f(x) > f(x_0).$$

(3) Beweis Analog.  $\square$