

Wir wollen hier einen oft angewendeten
Spezialfall von Korollar IV.36 hervor-
heben:

Korollar IV.37 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig
differenzierbar. Sei $a < x_0 < b$.

Annahme: $f'(x_0) = 0$.

(1) Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist x_0
strikte lokale Minimalstelle.

(2) Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist x_0
strikte lokale Maximalstelle.

Beispiel IV. 38 Sei $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Wir bestimmen die lokalen Extremalstellen von f . Sei x_0 eine solche; dann gilt nach Satz IV. 14 (3):

$$f'(x_0) = 0$$

d.h. $4x_0^3 - 2x_0 = 0$

Also $x_0 \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

Nun ist $f^{(2)}(x) = 12x^2 - 2$.

$$f^{(2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$$

$$f^{(2)}(0) = -2 < 0.$$

Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ strikte

lokale Minimalstellen und 0 strikte

lokale Maximalstelle.

V. Das Riemann Integral.

Die Integralrechnung ist viel älter wie die Differenzialrechnung; die Berechnung von Flächeninhalte, Volumina, etc., haben Mathematiker wie Archimedes (287-212), Kepler (1571-1630), Cavalieri (1598-1647), Fermat (1607-1665) u.a. beschäftigt. Der entscheidende Durchbruch ist Newton, Leibniz und Joh. Bernoulli; zu verdanken die unabhängig gezeigt, dass die Operation der Integration die Umkehrung der Operation der Ableitung ist.

V. 1. Definition und Integrabilitätskriterium.

In diesem sind $a < b$ reelle Zahlen
und $I = [a, b]$.

Def. V. 1 Eine Partition von I ist eine
endliche Teilmenge $P \subset [a, b]$ mit
 $\{a, b\} \subset P$.

Offensichtlich gilt

$$n := \text{card } P - 1 \geq 1$$

und es gibt genau eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1, 2, \dots, n\} & \longrightarrow & P \\ j & \longmapsto & x_j \end{array}$$

mit der Eigenschaft, $i < j \Rightarrow x_i < x_j$.

Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P falls $P \subseteq P'$. Offensichtlich ist die Vereinigung $P_1 \cup P_2$ zweier Partitionen wieder eine Partition, insbesondere haben zwei Partitionen immer eine gemeinsame Verfeinerung.

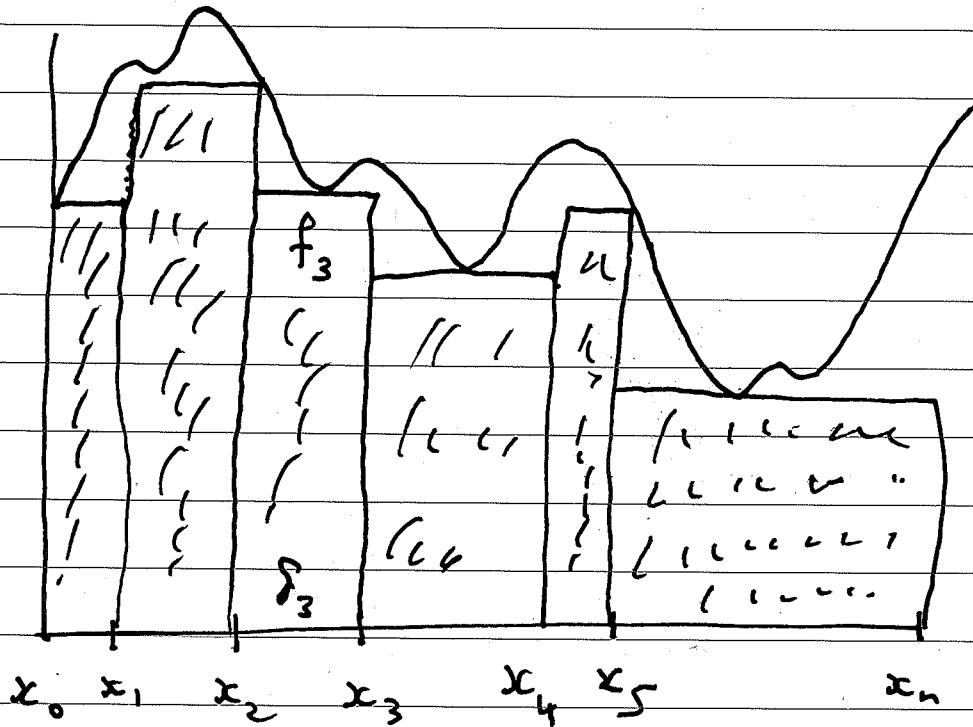
Sei nun $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion d.h. (siehe Def. 3.1. (3)) es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Sei auch $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Partition von I . Insbesondere gilt $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$.

Wir bezeichnen mit $\delta_i := x_i - x_{i-1}$,

V-4-

$i \geq 1$, die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$.



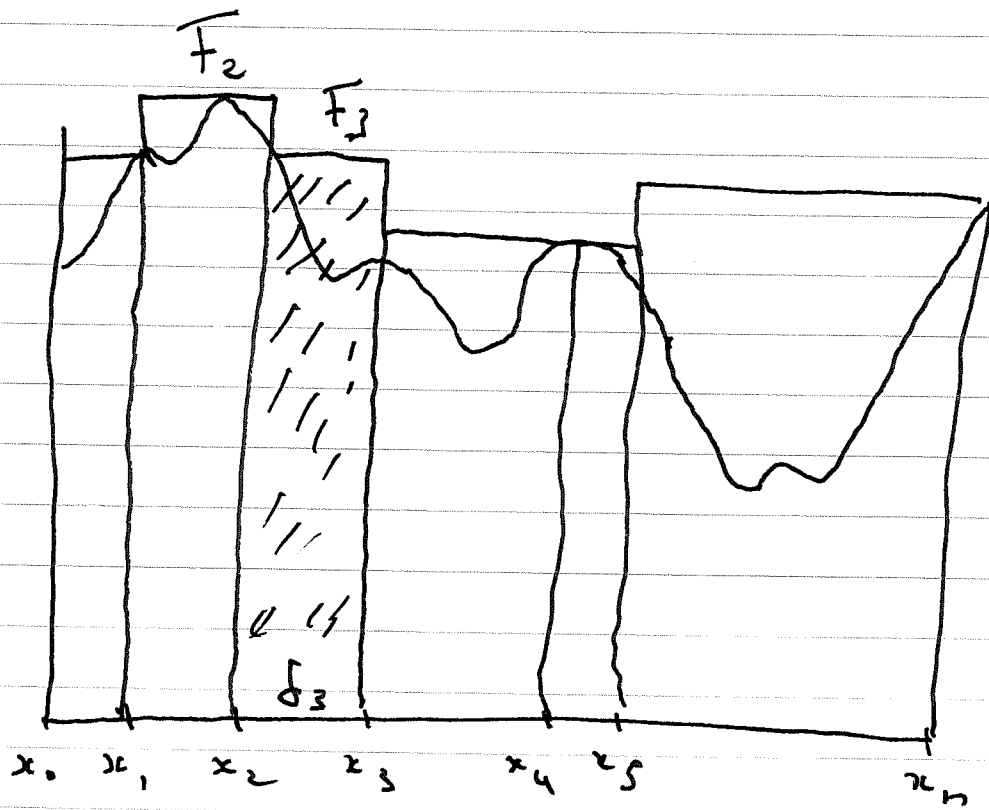
Wir definieren die Untersumme

$$\Delta(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

und die Obersumme

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

V - 465 -



- V - 5 -

Bemerkung, dass

$$-M \leq f_i \leq F_i \leq M$$

somit sind $\rho(f, P)$ und $S(f, P)$ wohl-
definiert und es gilt:

$$-M(b-a) \leq \rho(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a).$$

Lemma V. 2

(1) Sei P' eine Verfeinerung von P , dann

gilt: $\rho(f, P) \leq \rho(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$

(2) Für beliebige Partitionen P_1, P_2

gilt $\rho(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.

Beweis:

(1) Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ und

P' eine Verfeinerung von P die durch $z \in P$ hinzufügen eines Punktes y entsteht.

Sei $y \in]x_{i-1}, x_i[$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \rho(f, P') &= \sum_{j \neq i} \delta_j f_j + (y - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq y} f(x) \\ &\quad + (x_i - y) \inf_{y \leq x \leq x_i} f(x) \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\inf_{x_{i-1} \leq x \leq y} f(x) \geq \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f_i$$

$$\inf_{y \leq x \leq x_i} f(x) \geq \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f_i$$

Voraus folgt:

- V - 7 -

$$\rho(f, P') \geq \sum_{j \neq i} \delta_j f_j + \underbrace{(y - x_{i-1}) f_i + (x_i - y) f_i}_{(x_i - x_{i-1}) f_i}$$

" $\delta_i f_i$

$$= \rho(f, P).$$

Eine allgemeine Verfeinerung P' von P lässt sich als successive erst Punktverfeinerungen von P ausgehend darstellen.

Die Ungleichung $S(f, P') \leq S(f, P)$

wird analog bewiesen; die Ungleichung $S(f, P') \leq S(f, P')$ ist vor Lemma V. 2 schon bemerkt worden.

(2) Da $P_1 \cup P_2$ eine Verfeinerung von P_1

- V-8 -

ist folgt aus (1) :

$$\Delta(f, P_1) \leq \Delta(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_2).$$

□

Sei nun $\mathcal{P}(I)$ die Menge der Partitionen von I . Wir definieren:

$$\Delta(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \Delta(f, P)$$

$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P).$$

Aus Lemma
V.2.(2) folgt
 $\Delta(f) \leq S(f).$

Def. V.3 Eine beschränkte Funktion

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar
(oder kurz integrierbar) gdw

$$\Delta(f) = S(f).$$

- V - 9 -

In diesem Fall bezeichnen wir den
Gemeinsamen Wert von $\rho(f)$ und $S(f)$

mit $\int_a^b f(x) dx$.

Satz V. 4 Eine beschränkte Funktion ist
genau dann integrierbar falls

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit

$$S(f, P) - \rho(f, P) < \varepsilon.$$

Beweis: f ist genau dann integrierbar

falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_1, \exists P_2$ Partitionen

so dass

$$S(f, P_2) - \rho(f, P_1) < \varepsilon.$$

In diesem Fall folgt mit $P = P_1 \cup P_2$

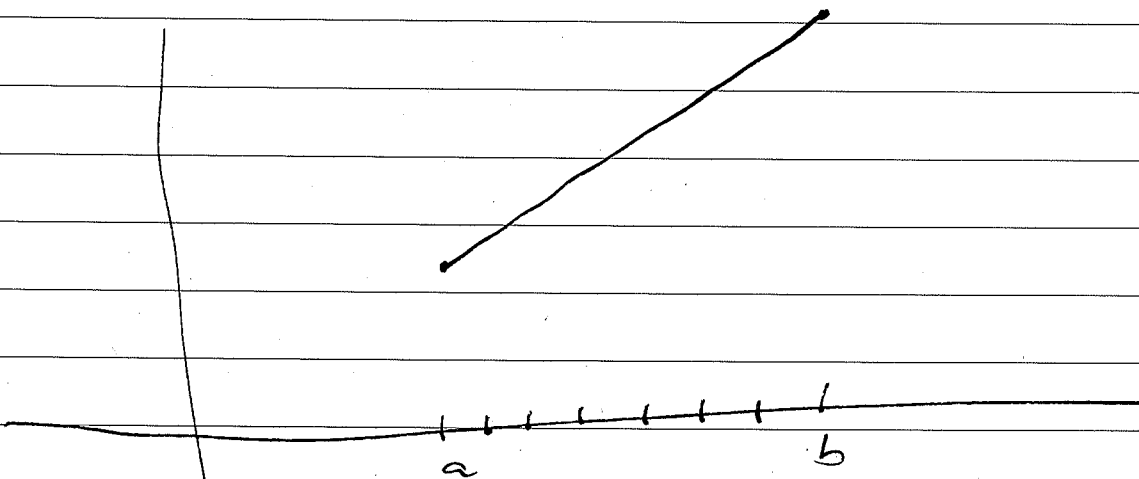
$$\bar{I} \sim 10$$

$$\text{aus } S(f, P_2) \geq S(f, P) \geq \rho(f, P) \geq \rho(f, P_1)$$

$$S(f, P) - \rho(f, P) < \varepsilon.$$

Die Umkehrung ist klar. $\square$

Beispiel V.5 $f(x) = x$, auf $[a, b]$:



$$\text{Sei } P_n = \{a + i \cdot h : 0 \leq i \leq n\}$$

$$\text{wobei } h = \frac{b-a}{n}.$$

$$\text{Dann ist } \rho(f, P_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1} (x_i - x_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
 & \sim \overline{3V} \sim 11 \sim \\
 & = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (a + (i-1)h) \\
 & = \left(\frac{b-a}{n} \right) \cdot \left\{ na + h \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right\} \\
 & = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
 S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n x_i (x_i - x_{i-1}) \\
 &= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Also } \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n).$$

Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Beispiel V.6 Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert

durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

Da jeder Intervall positiver Länge sowohl rationale wie irrationale Zahlen enthält

folgt $\Delta(f, P) = 0$ und $\Sigma(f, P) = 1$

$\forall P \in \mathcal{P}(I)$. Also ist f nicht integrierbar.

Beispiel V.7 Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert

durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational oder } x = 0 \\ 1/q & x = \frac{p}{q}, \quad p, q \text{ natürliche Zahlen, teilerfremd.} \end{cases}$$

Es ist eine interessante Übung zu zeigen,

dass f integrierbar ist und $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Folgendes Integrierbarkeitskriterium führt zu einer Charakterisierung des Integrals als Grenzwert und Integrierbarkeit als Existenz dieses Grenzwertes.

Thm. V.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875)

Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar falls

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \quad S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die Menge

der Partitionen P für welche $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$.

Beweis: Sei f beschränkt mit

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

und integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$ und P

eine Partition mit

$$S(f, P) - \rho(f, P) < \varepsilon.$$

Sei $Q = \{y_0, \dots, y_m\}$ eine beliebige

Partition mit $\max_{1 \leq i \leq m} (y_i - y_{i-1}) \leq \delta$.

$$\text{Aus } S(f, P) \geq S(f, P \cup Q) \geq \rho(f, P \cup Q) \geq \rho(f, P)$$

folgt:

$$S(f, P \cup Q) - \rho(f, P \cup Q) < \varepsilon.$$

$$\text{Sei } P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

Die Obersumme $S(f, Q) (\geq S(f, P \cup Q))$

unterscheidet sich von $S(f, P \cup Q)$ nur

in den Intervallen $[y_{i-1}, y_i]$ für welche

- IV - 15 -

$$\bigcup y_{i-1}, y_i \cap P \neq \emptyset.$$

Falls wir $\delta < \min_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$ wählen

dann enthält solche ein $\bigcup y_{i-1}, y_i$ genau

ein $x_k \in P$.

Dann ist

$$(y_i - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1}, y_i]} f(x)$$

$$= \left((y_i - x_k) + (x_k - y_{i-1}) \right) \sup_{[y_{i-1}, y_i]} f(x).$$

Nun ^{schätzen} ~~setzen~~ wir ab:

$$\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f(x) \leq \sup_{[y_{i-1}, x_k]} f(x) + 2M$$

$$\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f(x) \leq \sup_{[x_k, y_i]} f(x) + 2M.$$

Also:

$$(y_i - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1}, y_i]} f(x) \leq (y_i - x_k) \sup_{[x_k, y_i]} f(x) + (x_k - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1}, x_k]} f(x) + (y_i - y_{i-1}) 2M.$$

Da es höchstens $(n-1)$ Intervalle mit

$$]y_{i-1}, y_i[\cap P \neq \emptyset$$

gibt, folgt:

$$S(f, Q) \leq S(f, P \cup Q) + 2Mn\delta.$$

Ein analoges Argument zeigt:

$$\rho(f, P \cup Q) \leq \rho(f, Q) + 2Mn\delta$$

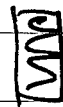
Woraus mit

$$S(f, P \cup Q) - \rho(f, P \cup Q) < \varepsilon$$

$$S(f, Q) - \rho(f, Q) < \varepsilon + 4Mn\delta, \text{ folgt.}$$

$$\text{Falls also } \delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4Mn}, \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \right\}$$

folgt $|S(f, \xi) - R(f, \xi)| < 2\varepsilon$.



In der Folge ist es zweckmäßig für eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ die

Zahl
$$\delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

eingzuführen.

Sei P eine Partition und zudem wählen wir $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dann ist

$$\sigma := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta_i$$

eine Riemannsche Summe.

Korollar V.9

Die beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ist genau dann integrierbar mit $A := \int_a^b f(x) dx$

falls:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$

Partition mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1, \dots, \xi_n$,

mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$,

$$\left| A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Beweis: überlassen wir als Übung.



V. 2. Integrierbare Funktionen.

Bis jetzt haben wir gesehen, dass konstante Funktionen sowie die Funktion $f(x) = x$ auf jedem kompakten Intervall integrierbar sind. Mit folgendem Satz vergrößen wir unseren Vorrat an integrierbaren Funktionen.

Theorem V.10

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

und f/g (falls $|g(x)| \geq c > 0 \forall x \in [a, b]$)

integrierbar.

~~Bemerkung~~

Bemerkung V.11 : Sei $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x, y \in [c, d]} |\varphi(x) - \varphi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \varphi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \varphi(x).$$

Einerseits gilt offensichtlich $\forall x, y \in [c, d]$:

$$\varphi(x) \leq \sup_{[c, d]} \varphi$$

$$\varphi(y) \geq \inf_{[c, d]} \varphi$$

$$\text{also } \varphi(x) - \varphi(y) \leq \sup_{[c, d]} \varphi - \inf_{[c, d]} \varphi$$

woraus durch Vertauschen von x, y folgt:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sup_{[c, d]} \varphi - \inf_{[c, d]} \varphi.$$

Andererseits, sei $\varepsilon > 0$: dann gibt es

$\xi \in [c, d]$ und $\eta \in [c, d]$ mit:

$$\underline{V} = 21$$

$$\varphi(\xi) > \sup_{[c,d]} \varphi - \varepsilon \text{ und } \varphi(\eta) < \inf_{[c,d]} \varphi + \varepsilon$$

Woraus

$$\varphi(\xi) - \varphi(\eta) > \sup_{[c,d]} \varphi - \inf_{[c,d]} \varphi - 2\varepsilon$$

folgt.

Beweis von Satz V.10 :

Sei $\varepsilon > 0$ und P_1, P_2 Partitionen mit

$$S(f, P_1) - \Delta(f, P_1) < \varepsilon$$

$$S(g, P_2) - \Delta(g, P_2) < \varepsilon$$

Mit $P = P_1 \cup P_2$ folgt also

$$S(f, P) - \Delta(f, P) < \varepsilon$$

$$S(g, P) - \Delta(g, P) < \varepsilon.$$

$$\text{Sei } P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \delta_i = x_i - x_{i-1},$$

$$F_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad f_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$$G_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g, \quad g_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g.$$

(1) Sei $h(x) = f(x) + g(x)$. Dann folgt für alle $x, y \in [a, b]$:

$$|h(x) - h(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

Mit $H_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} h, \quad h_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} h$

folgt dann aus Bemerkung V. 11:

$$H_i - h_i \leq F_i - f_i + G_i - g_i.$$

Also

$$\sum_{i=1}^n (H_i - h_i) \delta_i \leq \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \delta_i + \sum_{i=1}^n (G_i - g_i) \delta_i.$$

$$\begin{aligned} S(f+g, P) - s(f+g, P) &\leq S(f, P) - s(f, P) \\ &\quad + S(g, P) - s(g, P) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f+g$ integrierbar ist.

(2) $h = \lambda \cdot f$: wird als Übung überlassen.

(3) $h = f \cdot g$: $\forall x, y \in [a, b]$ gilt

$$|h(x) - h(y)| \leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)|$$

Sei $M \geq 0$ mit

$$|f(x)| \leq M, |g(y)| \leq M \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Dann folgt

$$|h(x) - h(y)| \leq M |g(x) - g(y)| + M |f(x) - f(y)|.$$

$$\text{Mit } H_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} h, \quad h_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} h$$

folgt dann wieder aus Bemerkung V.11:

$$H_i - h_i \leq M(G_i - g_i) + M(F_i - f_i)$$

$$\text{Ak. } S(f, g, P) - s(f, g, P)$$

$$\leq M(S(g, P) - s(g, P)) +$$

$$+ M(S(f, P) - s(f, P)) < 2M\varepsilon.$$

(4) $h = |f|$: Übung.

(5) $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ folgt aus (1) und (4).

(6) Es genügt (nach (2)) zu zeigen dass $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ integrierbar ist,

sofern $|g(x)| \geq \delta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

- V - 25 -

Für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| |g(y)|} \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{c^2}$$

Woraus die Integrierbarkeit von h leicht folgt. $\square$

Aus Satz V.10 folgt dann:

Korollar V.12 Seien P, Q Polynome und $[a, b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

integrierbar.

- V - 28 -

Wir werden jetzt zeigen, dass auf einem kompakten Intervall eine stetige Funktion immer integrierbar ist. Dies beruht auf einer wesentlichen Eigenschaft, nämlich gleichmäßige Stetigkeit.

Def. V.13 Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $D \subseteq \mathbb{R}$, ist auf D gleichmäßig stetig,
falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A:$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beispiel V.14 Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig aber nicht gleichmäßig stetig.

V.15

Satz (Heine 1872) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig in dem kompakten Intervall $[a, b]$.

Dann ist f in $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

Beweis: Ansonsten gibt es $\varepsilon > 0$

so dass, $\forall \delta_n = 1/n$, gibt es x_n, y_n

in $[a, b]$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ und

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Sei $(y_{l(n)})_{n \geq 1}$ eine konvergente

Teilfolge mit Grenzwert $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_{l(n)}$.

Da $|x_{l(n)} - y_{l(n)}| < \frac{1}{l(n)}$, folgt

dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{l(n)} = y$. Aus der Stetigkeit

von f in y folgt insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_{l(n)}) - f(y_{l(n)})|$$

$$= |f(y) - f(y)| = 0 \quad \text{also auch}$$

ein Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1.$



Folgender Satz folgt dann relativ schnell:

Satz II.16 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f integrierbar.

Beweis: Da $[a, b]$ ein kompakter Intervall ist, folgt aus dem min-max Satz, dass f beschränkt ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass, nach

Satz II.15, $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Sei $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition

mit $\delta(P) < \delta$. Für jedes $1 \leq i \leq n$

und alle $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ folgt dann

- V-29 -

$|f(x_i) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon$ und deshalb (Bemerkung V.4)

$$F_i - f_i \leq \varepsilon$$

Woraus

$$\int(f, \mathcal{P}) - \mathcal{P}(f, P) = \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \delta_i$$

$\leq \varepsilon(b-a)$ folgt.

Also ist f integrierbar.

