

Kapitel I. Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen.

I.1. Der Körper der reellen Zahlen.

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Natürliche Zahlen kann man addieren und multiplizieren. Dagegen hat die Gleichung

$$x + 1 = 0$$

in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Dieses Problem löst man in dem man die Menge der ganzen Zahlen einführt $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

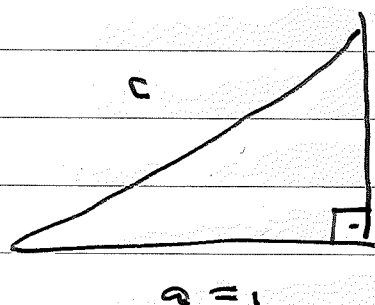
Die Gleichung $2x = 1$ hat in $\mathbb{Z}$ keine Lösung. Man erweitert $\mathbb{Z}$ ^{deshalb} zur Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

I-2

Jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ besitzt dann eine eindeutige Darstellung $r = \frac{p}{q}$ mit $q > 0$, p und q teilerfremd.

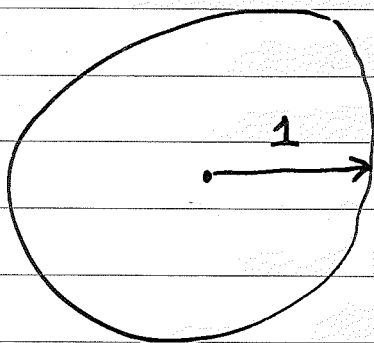
Die Menge der rationalen Zahlen genügt bei weitem nicht um die elementarsten geometrischen Probleme zu lösen:



$b=1$

$c^2 = 2$ hat in $\mathbb{Q}$

keine Lösung.



Kreisumfang

$$L = 2\pi$$

Satz I.1 (Lindemann 1882) Es gibt keine Gleichung der Form

$$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{Q}$ die " π " erfüllt.

I-3.

Wir werden später beweisen, dass $\sqrt{2}$ und π reelle Zahlen sind.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen entsteht durch einen Vervollständigungsprozess von $\mathbb{Q}$ den wir überspringen.

Wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und beschreiben dessen grundlegende Eigenschaften.

Die Menge $\mathbb{R}$ ist mit zwei Operationen versehen:

Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$

Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$

~~und~~ und einer Ordnungsrelation: $\leq$

für welche gilt:

Satz I.2 $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter Körper der bezüglich
ordnungsvollständig ist.

I-4

Wir werden jetzt diese Eigenschaften im Detail besprechen. Es gilt zwei ausgezeichnete Elemente $0, 1$ in $\mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$.

Axiome der Addition:

A_1 : Assoziativität: $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

A_2 : Neutrales Element: $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A_3 : Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} :$
 $x + y = 0$

A_4 : Kommutativität: $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$.

Bemerkung I.3: In A_3 ist y eindeutig bestimmt und wird mit $-x$ bezeichnet.

Axiome der Multiplikation:

M_1 : Assoziativität: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

M_2 : Neutrales Element: $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

M_3 : Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}$
mit $x \cdot y = 1$

M_4 : Kommutativität: $x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$.

I-5

Bemerkung I.4: in M_3 ist y eindeutig bestimmt und wird mit x^{-1} bezeichnet.

Distributivität:

$$D: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Ordnungsaxiome:

$$O_1: x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Reflexivität})$$

$$O_2: x \leq y \text{ und } y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad (\text{Transitivität})$$

$$O_3: x \leq y \text{ und } y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$O_4: \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt entweder } x \leq y \text{ oder } y \leq x \quad (\text{Total})$$

Die Ordnung ist mit den Körperoperationen

kompatibel:

$$K_1: \forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$K_2: \forall x \geq 0, \forall y \geq 0 \text{ gilt } x \cdot y \geq 0$$

Bemerkung I.5: die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen versehen mit Addition, Multiplikation und Ordnung $\leq$ genügt den obigen Axiomen.

Was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet ist

(V.) ~~#~~ Ordnungsvollständigkeit:

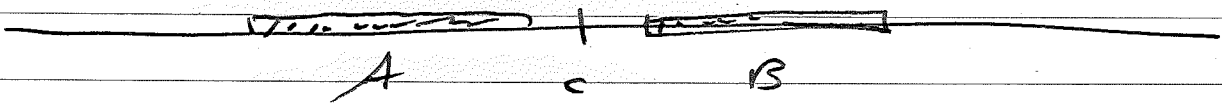
Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$ so dass

i.) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

ii.) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$.

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$\forall a \in A, a \leq c$ und $\forall b \in B, c \leq b$.



Wir betrachten jetzt einige Folgerungen obiger

Axiome:

Notation: $a > b$ bezeichnet $a \geq b$ und $a \neq b$.

I-7.

Folgerungen I.G.

1.) Existenz der additiven und multiplikativen Inverse.

$$2.) 0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$3.) (-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ insbesondere}$$

$$(-1)^2 = 1$$

$$4.) y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq 0.$$

$$5.) y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \text{ insbesondere } 1 = 1 \cdot 1 > 0.$$

$$6.) x \leq y \text{ und } u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$$

$$7.) 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq u \leq v$$

$$\Rightarrow xu \leq y \cdot v.$$

Beweis:

1.) Übung.

$$2.) 0 + 0 = 0 \quad (A2)$$

$$(0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = 0 \cdot x \quad (D)$$

$$(0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 \quad (A3)$$

I - 7 ~~100~~ ~~100~~ bis -

$$0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \quad (A1)$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_0$$

(A3)

$$0 \cdot x + 0 = 0$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$$

$$0 \cdot x = 0$$

(A2)

$$3.) \quad x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1))x \quad (D)$$

$$= 0 \cdot x = 0 \quad (2)$$

$$x + (-1) \cdot x = 0 \Rightarrow (-1)x = -x$$

$$4.) \quad y \geq 0 \xrightarrow{K1} y + (-y) \geq \underbrace{0 + (-y)}_0 = -y$$

5.) Falls $y \geq 0$ folgt aus $K2$:

$$y^2 = y \cdot y \geq 0 \cdot 0 = 0$$

Falls $y \leq 0$ folgt (4) $-y \geq 0$ und

$$\text{somit } (-y)^2 \geq 0$$

$$(-y)^2 = (-y)(-y) = (-1)y(-1)y = (-1)^2 y^2 = y^2$$

6.) Übung

7.) Übung

- I - 8 - .

Folgende Folgerung zeichnen wir speziell aus:

Korollar I.7 (Archimedisches Prinzip)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.

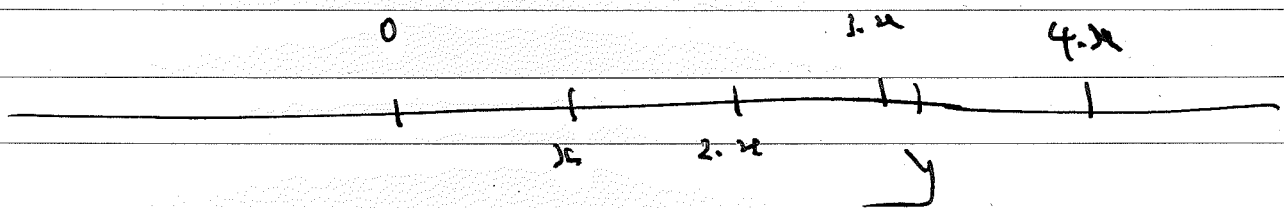
dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, mit

$$y \leq n \cdot x.$$

Beweis: Sei $r = yx^{-1}$.

Z.Z.: es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$.

Widerspruchsbeweis: $m \leq r \quad \forall m \in \mathbb{N}$.



I-9.

Sei $A = \mathbb{N}$ und $B = \{y \in \mathbb{R} : m \leq y \ \forall m \in \mathbb{N}\}$

dann gilt $1 \in B$ und aus V) folgt:

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit (i) $m \leq c \ \forall m \in \mathbb{N}$
(ii) $c \leq y \ \forall y \in B$.

Aus (i) folgt $m+1 \leq c \ \forall m \in \mathbb{N}$,

d.h. $m \leq c-1 \ \forall m \in \mathbb{N}$

Woraus $c-1 \in B$ folgt. Dann folgt aus (ii)

$$c \leq c-1$$

~~ein Widerspruch.~~ ~~□~~

also: $1 \leq 0$, ein Widerspruch. $\square$

Ordnungsvollständigkeit sowie das Archimedische Prinzip benutzen wir jetzt um folgende grundlegende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ zu zeigen:

Satz I.8 Für jedes $t \geq 0$ in $\mathbb{R}$ hat die

Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Notation: $a > b \iff a \geq b$ und $a \neq b$.

Bemerkung : Für $t \geq 0$ gibt es genau eine Lösung von $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet.

Beweis: Für $t = 0$ ist die Aussage klar.

Sei also $t > 0$. Wir definieren:

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \quad y^2 \leq t\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{R} : z > 0 \quad z^2 \geq t\}$$

und möchten das Ordnungsvollständigkeitsaxiom V auf A und B anwenden.

Wir müssen zeigen, dass die Voraussetzungen $V(i)$ und $V(ii)$ erfüllt sind.

Zu $V(i)$:

$A \neq \emptyset$ denn $0 \in A$.

$B \neq \emptyset$: Sei (Archimedes) $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

und $n \geq t$. Aus V_2 angewendet auf

$$n \geq t \quad \text{und} \quad n \geq 1$$

folgt $n^2 \geq t \cdot 1 = t$ und somit folgt

$n \in B$.

- I - 11 -

Zu Vii): $\forall y \in A, \forall z \in B$ gilt:

$$y^2 \leq t \leq z^2$$

insbesondere folgt

$$(z-y)(z+y) = z^2 - y^2 \geq 0$$

Aus $z+y \geq z > 0$ folgt

$$z-y \geq 0$$

und A, B erfüllen also Vii.

Nach V gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$y \leq c \leq z \quad \forall y \in A, \forall z \in B.$$

Insbesondere $y^2 \leq c^2 \leq z^2$.

Wir zeigen nun, dass $c^2 \geq t$ und $c^2 \leq t$

Woraus dann $c^2 = t$ folgen wird.

$c^2 \geq t$: Wir nehmen an, $c^2 < t$.

Insbesondere folgt $c \in A$. Da $t - c^2 > 0$
und $2c+1 \geq 1 > 0$ gibt es nach Archimedes

~ I - 12 -

$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ mit

$$2c + 1 \leq n(t - c^2).$$

Mit dieser Wahl von n folgt:

$$\begin{aligned} \left(c + \frac{1}{n}\right)^2 &= c^2 + 2c \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq c^2 + 2c \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= c^2 + (2c + 1) \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq c^2 + t - c^2 = t \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $c + \frac{1}{n} \in A$.

Andererseits gilt aber: $y \leq c \quad \forall y \in A$

insbesondere $c + \frac{1}{n} \leq c$

also $\frac{1}{n} \leq 0$, ein Widerspruch.

Dies zeigt $c^2 > t$ und der Beweis für $c^2 \leq t$ verläuft analog. $\square$

Mit der Ordnungsrelation führen wir

folgende Begriffe ein:

Definition I.9 Seien $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(i) \max \{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

$$(ii) \min \{x, y\} = \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \max \{x, -x\}.$$

Für den Absolutbetrag gelten dann folgende Eigenschaften

Satz I.10 (i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$(ii) |xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$(iii) |x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$(iv) |x+y| \geq ||x| - |y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir überlassen den Beweis als Übung.

Satz I. 11. (Young'sche Ungleichung)

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2.$$

Beweis: $\left(\sqrt{\varepsilon} |x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |y| \right)^2 \geq 0.$

Woraus folgt:

$$\varepsilon |x|^2 - 2|x||y| + \frac{1}{\varepsilon} |y|^2 \geq 0$$

Nun ist $|x|^2 = x^2, |x||y| = |x \cdot y|, |y|^2 = y^2.$

Im Zusammenhang mit der Ordnungsrelation führen wir folgende Notationen ein:

Sei $a \leq b$:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$$

$$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

$$]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \}$$

$$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}.$$

Wir führen noch zwei Symbole ein $+\infty$, $-\infty$:

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}.$$

Def. I.12: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls $a \leq c$, $\forall a \in A$, und A heißt nach oben beschränkt falls es eine obere Schranke von A gibt.

(ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine untere Schranke von A falls $c \leq a$ $\forall a \in A$ gilt, und A heißt nach unten beschränkt falls A eine untere Schranke besitzt.

(iii) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heißt ein Maximum von A falls $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.

(iv) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heißt ein Minimum von A falls $m \in A$ und m ist eine untere