

$|f(x_i) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon$ und deshalb (Bemerkung V.11)

$$F_i - f_i \leq \varepsilon$$

Woraus

$$\int(f, \mathcal{P}) - \mathcal{P}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \delta_i$$

$$\leq \varepsilon(b-a) \text{ folgt.}$$

Also ist f integrierbar. □

Es gibt auch Klassen von Funktionen die Unstetigkeitspunkte annehmen können und dennoch integrierbar sind.

Satz V.17 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton.

Dann ist f integrierbar.

Beweis: Wir nehmen an, f ist monoton steigend. Dann folgt:

$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ und insbesondere ist f beschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \geq 1$ natürliche Zahl

mit $(f(b) - f(a)) \frac{(b-a)}{n} < \varepsilon$.

Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ die Partition von $[a, b]$ wie folgt definiert:

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{n} \cdot i \quad 0 \leq i \leq n.$$

$$\text{Dann ist } \Delta_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

und da f monoton steigend ist, folgt:

$$F_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f = f_{i+1}$$

für alle $1 \leq i \leq n-1$.

$$S(f, P) - \rho(f, P)$$

$$= \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \delta_i$$

$$= \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{i=1}^n (F_i - f_i).$$

Und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) &= F_1 - f_1 + F_2 - f_2 + \dots + F_n - f_n \\ &= -f_1 + F_n = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Woraus folgt:

$$S(f, P) - \rho(f, P) = (f(b) - f(a)) \left(\frac{b-a}{n} \right) < \varepsilon$$

und f ist integrierbar.



Bemerkung V.18

Seien $a < b < c$ und $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$

integrierbar. Dann ist f integrierbar

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx. \quad (\text{V.W})$$

In der Tat ergibt die Summe einer Ober- (resp. Unter-)summe für $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ eine

Ober- (resp. Unter-)summe für f .

Wir erweitern jetzt die Definition von $\int_a^b f(x) dx$ auf:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad f \in V \quad a < b,$$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Dann gilt V. 19 für alle Triple
 a, b, c unter den entsprechenden
 Integrierbarkeitsvermutungen.

Mit diesen Konventionen gilt:

Satz V. 20 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompakter
 Intervall mit Endpunkten a, b sowie
 $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar
 und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

O.E.B.A. können wir $a < b$ annehmen.

Bewas: Aus Thm V. 10 schliessen wir,
dass $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ integrierbar ist.

Sei (siehe Korollar I.9) $\varepsilon > 0$ und
 $\delta > 0$ so, dass für jede Partition
 P mit $\delta(P) < \delta$ die entsprechende

Riemannschen Summen sowohl

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx, \text{ wie auch}$$

$$\int_a^b f_1(x) dx \text{ und } \int_a^b f_2(x) dx \text{ b.} \approx$$

auf ε approximieren. Dann folgt

für $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, mit $\delta(P) < \delta$

und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$:

$$\left| \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx - \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)) \Delta x_i \right|$$

$$< \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b f_1(x) dx - \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \delta_i \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b f_2(x) dx - \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \delta_i \right| < \varepsilon.$$

Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i)) =$$

$$= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \right)$$

Woraus folgt:

$$\left| \int_a^b \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) dx - \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx - \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx \right|$$

$$< (1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|) \varepsilon.$$

Da letztere Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$

gilt, folgt der Satz. $\square$

V.3. Ungleichungen und der Mittelwertsatz.

Nebot Linearität (siehe Satz V.20)
hat das Riemann Integral auch eine
Monotonieeigenschaft; diese
wiederum führt zum Mittelwertsatz
der die Basis der Fundamentalsätze
der Differentialrechnung bildet.

Satz V.21. Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
beschränkt integrierbar, und

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Dann folgt: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

Beweis: Da nach V.20, $\int_a^b$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

Da $g(x) - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

gilt für jede Partition P von $[a, b]$:

$$S(g-f, P) \geq \rho(g-f, P) \geq 0$$

und somit folgt $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$



Korollar V.22 Falls $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

beschränkt integrierbar, folgt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- IV - 38 -

Beweis: Wende Satz IV.28 an auf
die Ungleichungen:

$$- |f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Dann folgt

$$- \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

und aus der ersten Ungleichung,

$$- \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Woraus

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

folgt.

□

Satz V.23 (~~de~~ Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bonyakowski 1859) Die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Beweis: Aus Satz V.10 folgt, dass $f \cdot g$, f^2 , g^2 beschränkt und integrierbar sind.

Aus der Monotonizität (Satz V.21) und Linearität (Satz V.20) des Integrals

folgt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx =$$

- IV - 40 -

$$= \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx$$

$$\text{Sei } A = \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$B = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$C = \int_a^b g^2(x) dx$$

Dann folgt:

$$A - 2tB + Ct^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Falls $C = 0$ folgt $B = 0$ und die Ungleichung ist bewiesen.

Falls $C \neq 0$ kann die Diskriminante der quadratischen Gleichung nicht strikt positiv sein, somit folgt

$$B^2 \leq A \cdot C$$

und der Satz ist bewiesen. $\square$

Als Anwendung der Monotonizitätseigenschaft des Integrals und des Zwischenwertsatzes ^{sowie des Min-Max Theorems} beweisen wir jetzt:

Theorem V. 24. (Mittelwertsatz)
Cauchy 1821

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweis: Nach dem Min-Max Satz, seien u, v in $[a, b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b].$$

Dann folgt:

$$f(u) \int_a^b 1 dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(v) \int_a^b 1 dx$$

- V - 42 -

$$\text{Also } f(u)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(v)(b-a).$$

OEDA: $a < b$.

Also folgt:

$$f(u) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq f(v).$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt:

$$f([a, b]) = [f(u), f(v)],$$

insbesondere gibt es $\xi \in [a, b]$

$$\text{mit } f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$$

□

Beispiel V. 25: Die Stetigkeit ist eine wichtige Voraussetzung:

$$\text{Sei } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} - 43 -$$

$$\text{Dann ist } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{1/2} 0 \cdot dx + \int_{1/2}^1 1 \cdot dx \\ = \frac{1}{2}.$$

~~Die Idee~~

Die Beweisidee im Mittelwertsatz kann ausgenützt werden um zu zeigen:

Satz V.26. (Cauchy 1821)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei
 f stetig, g beschränkt integrierbar
 mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Dann

gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

V.4. Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung.

Dieser Satz, auch Fundamentalsatz der Analysis genannt, besagt dass die Ableitung die Umkehrung der Integration ist. Dieser Satz hat vielseitige Anwendungen u.a. auf die Berechnung von Flächeninhalten und Längen von Kurven.

Satz V.27 Seien $a < b$ und

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Beweis Seien $x, x_0 \in [a, b]$. Aus (IV. 19)

folgt,

$$\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

Also:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Aus dem Mittelwertsatz (Thm IV. 24)

schliessen wir, dass es $\xi = \xi(x, x_0)$

zwischen x_0 und x gibt mit:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi) (x - x_0).$$

Für $x \neq x_0$ folgt:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi)$$

Und da ξ zwischen x_0 und x liegt

folgt aus der Stetigkeit von f :

— V - 46 —

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

und der Satz ist bewiesen.

□

Dieser Satz motiviert folgende Definition:

Definition V. 28 Sei $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

stetig. Eine Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

heißt Stammfunktion von f falls

F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist

und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Theorem V. 29 (Fundamentalsatz der Differenzrechnung). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann gibt es eine Stammfunktion F von f , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Existenz von F ist durch IV.27 gegeben; falls F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, folgt

$$F_1' - F_2' = f - f = 0$$

$$\text{d.h. } (F_1 - F_2)' = 0.$$

Aus Korollar IV.18 (1) folgt, dass

$F_1 - F_2$ eine konstante Funktion ist.

Sei nun $\overline{F}$ eine beliebige Stammfunktion von f . Dann gibt es eine Konstante C

$$\text{mit: } F(x) = C + \int_a^x f(t) dt.$$

Insbesondere folgt,

$$F(b) = C + \int_a^b f(t) dt$$

$$F(a) = C$$