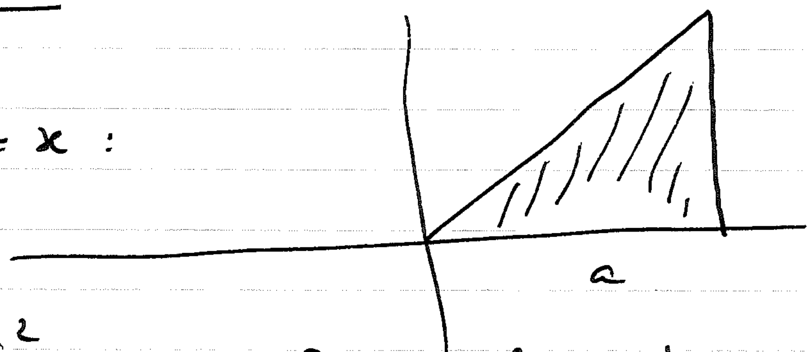
und folglich:

$$F(b) - F(a) = c + \int_a^b f(t)\,dt - c$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt. \quad \blacksquare$$

Beispiel V.30

(1) $f(x) = x$:



Dann ist $\frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f

und folglich:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

Dies ist der Flächeninhalt des schraffierten

Gebietes.

(2) $f(x) = x^2$

Dann ist $\frac{x^3}{3}$ Stammfunktion von f und folglich:

$$\int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}.$$

Zur Berechnung von Integralen und Stammfunktionen werden wir zwei Rechenregeln aus dem Fundamentalsatz herleiten. Es handelt sich um Partielle Integration und Substitution.

<u>Satz V. 31.</u> Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx .$$

<u>Beweis:</u> Die Funktion $H := f \cdot g$ ist stetig differenzierbar und ihre Ableitung ist nach Satz IV. 9 (2):

$$H' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Also ist H Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$ und es folgt aus Satz V. 29:

$$\int_a^b f'(x) g(x) + f(x) g'(x)\, dx = H(b) - H(a)$$

$$= f(b) g(b) - f(a) g(a)$$

Der Satz folgt dann aus der Linearität des Integrals. ∎

Satz V.32 Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\Phi([a,b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall $[c,d] \supset \Phi([a,b])$.

Dann ist nach der Kettenregel (Satz IV.11) $F \circ \phi$ eine Stammfunktion von

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(\phi(t))\,\phi'(t).$$

Dann folgt aus V.29:

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

Da F Stammfunktion von f ist, folgt nach V.29:

$$F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

und der Satz ist bewiesen. $\boxed{\xi}$