

Korollar I.34 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a+c, b+c$ in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt.$$

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$

so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx.$$

Beweis:

(1) $0 \in A$ können wir $a < b$ annehmen.

Wir wenden dann Satz V.32 auf

$$\phi(t) = t + c$$

an.

(2) $0 \in A$ können wir $a < b$ annehmen.

Wir wenden dann Satz V.32 auf

$$\phi(t) = c \cdot t$$

an.

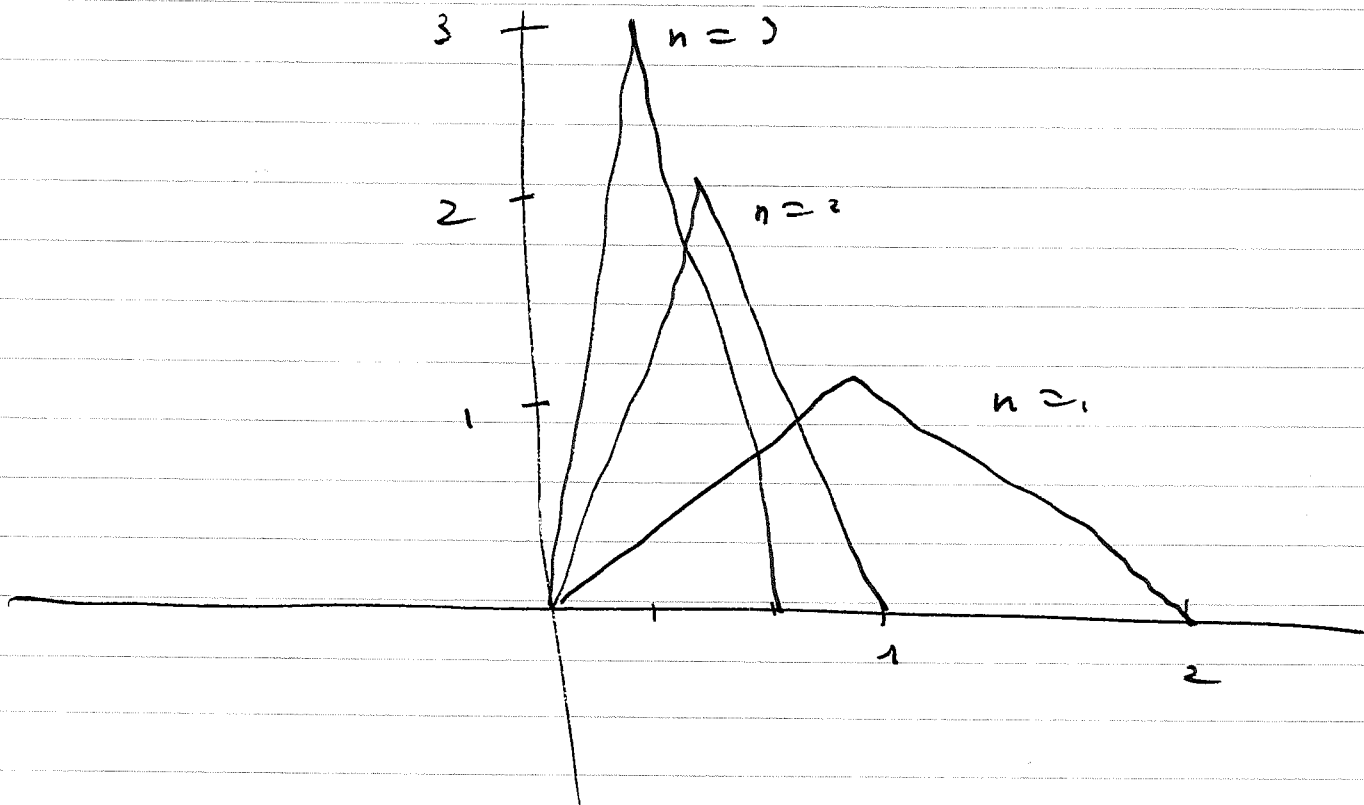


V. 5. Integration konvergenter Reihen.

Nir beginnen mit folgendem Beispiel:

Für $n \geq 1$ sei:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Dann gilt:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

$$(2) \int_0^2 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Beachte, dass f_n Punktweise aber nicht gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Satz V.39 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
eine Folge beschränkter integrierbarer
Funktionen die gleichmäßig gegen
eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

— V — 60 — .

Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis: die Voraussetzung besagt:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ so dass $\forall n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Insbesondere folgt $\forall x, y \in [a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + 2\varepsilon$$

Falls $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine beliebige

Partition von $[a, b]$ bezeichnet folgt

nach II. 11:

$$(F_i - f_i) \leq (F_{ni} - f_{ni}) + 2\varepsilon$$

$$- \overline{I} - \epsilon -$$

Da f_n integrierbar ist, gibt es

$$P = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ mit}$$

$$|S(f_n, P) - \int (f_n, P)| < \epsilon$$

Woraus

$$|S(f, P) - \int (f, P)| < 3\epsilon$$

folgt und somit ist f integrierbar.

Mittel der Integrierbarkeit von f folgt

denn aus Korollar IV. 22: $\forall n \geq n$,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq 3\epsilon(b-a).$$

□

Unmittelbar folgt aus Satz V.34:

Korollar V.35 Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge ~~mit~~ beschränkter integrierbarer Funktionen so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

Dann gilt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

Korollar V.37 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $r < \rho$ f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in (-r, r)$:

-V-63-

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)} x^{n+1}.$$

Beispiel V.38 : Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

hat Konvergenzradius 1. Es folgt
aus Beispiel IV.13 und Thm V.29:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

mit selben Konvergenzradius.

Sei nun $0 \leq x < 1$: und

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k} (-1)^{k-1} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \dots$$

Aus Leibniz (S. 5 II. 47) folgt:

$$\forall x \in [0, 1[$$

$$\begin{aligned} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} &\leq C_n(1+x) - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k} (-1)^{k-1} \right) \\ &\leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Da $\lim_{a \rightarrow 1^-}$ existiert, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} &\leq \ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

IV - 15 -

Beispiel V. 39. Wir wollen jetzt anwenden
(siehe Beispiel IV 19), dass:

$$(\arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nun ist wiederum:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

und mit dem selben Argument wie
in Beispiel V. 37 folgt:

$$\arctg^*(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

mit Konvergenzradius 1. Da

$$\arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

folgt wie in IV. 37:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Beispiel V. ⁴⁰ ~~39~~ (Fibonacci Zahlen).

Seien $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und für
 $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Wir erhalten die Fibonacci Folge:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

und wollen eine Formel für a_n herleiten.

Einer Idee von Euler folgend
definieren wir:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \dots$$

Mittels Induktion zeigt man leicht:

$$a_n \leq 2^n \quad \forall n \geq 0$$

und somit hat die Potenzreihe

$+\infty$ als Konvergenzradius.

- IV - 67 -

Nach Satz IV.40 können wir Gliedweise ableiten und erhalten:

$$f'(x) = a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$f''(x) = a_2 + a_3 x + a_4 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= c_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$+ a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= f(x) + f'(x).$$

~~Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x}$, dann~~

~~folgt $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$~~

~~$f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$~~

-IV-68-

Also erfüllt f die Differentialgleichung

$$f''(x) = f(x) + f'(x)$$

und zudem:

$$f(0) = a_0 = 1$$

$$f'(0) = a_1 = 1.$$

Wir wollen daraus eine Formel für f herleiten.

Sei $g(x) = e^{\lambda x}$; dann folgt

$$g''(x) - g(x) - g'(x) = e^{\lambda x} (\lambda^2 - 1 - \lambda)$$

und folglich erfüllen

$$g_1(x) = e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} \quad \text{und}$$

$$g_2(x) = e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}$$

sowie jede linear Kombination

$$-\sqrt{5} - 15 -$$

$$c_1 g_1 + c_2 g_2$$

die Gleichung $g'' = g + g'$

Mit $c_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}$ $c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$

erfüllt $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$

die Gleichung $g''(x) = g(x) + g'(x)$

sowie $g(0) = g'(0) = 1$.

Sei also $h(x) = f(x) - g(x)$.

Dann ~~ist~~ gilt folgendes

(1) h ist Summe ^{von drei} konvergenten

Potenzreihen, also ist h Summe einer konvergenten Potenzreihe.

(2) $h(0) = h'(0) = 0$

(3) $h''(x) = h(x) + h'(x)$.

$$- \sqrt{5} - 70 -$$

Aus (3) folgt $h^{(j+2)}(x) = h^{(j)}(x) + h^{(j+1)}(x)$

und zusammen mit (2) folgt:

$$h^{(j)}(0) = 0 \quad \forall j \geq 0$$

Woraus mit (1), $h \equiv 0$ folgt.

Wir haben also gezeigt:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \right) e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) x} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \right) e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) x}$$

Es folgt:

$$a_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Unter Anwendung des Binomialsatzes

folgt

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n+1}{2i+1} 5^i.$$

-IV- 70 -

$$h''(x) \approx h'(x) + h''(x)$$

Woraus $h^{(j+2)}(x) = h^{(j)}(x) + h^{(j+1)}(x) \quad \forall j \geq 0$

folgt. Aus $h(0) = h'(0) = 0$ folgt

denn $h^{(j)}(0) = 0 \quad \forall j \geq 0$ und folglich

$$h(x) = 0 \quad \forall x.$$

Wir schließen nun:

$$a_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n+1}{2i+1} 5^i.$$

V. 6. Euler - McLaurin Summations - Formel.

Diese Formel, die unabhängig von Euler (1736) und McLaurin (1742) entwickelt wurde ist ein sehr nützliches Instrument um Summen wie

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{oder } \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln(n!)$$

abzuschätzen; es wird uns auch erlauben die Formel für

$$1^l + 2^l + \dots + n^l$$

für jedes $l \geq 1$ herzuleiten.

In der Euler - McLaurin'schen Formel spielen eine Folge von Polynomen, nämlich die Bernoulli Polynome $B_n(x)$

sowie $B_n = B_n(0)$, die Bernoulli Zahlen eine wichtige Rolle.

Sei $P_0 = 1$. Es gibt eine Folge von Polynome $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ die eindeutig durch folgende zwei Eigenschaften bestimmt ist:

$$(1) \quad P_k' = P_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

$$(2) \quad \int_0^1 P_k(x) dx = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Via Induktion: wir nehmen an, $P_0, \dots, P_{k-1}$ ist eindeutig bestimmt, $k \geq 1$. Dann folgt aus (1)

$$P_k(x) = \int_0^x P_{k-1}(t) dt + C$$

wobei C eine zu bestimmende Konstante ist. Offensichtlich ist P_k ein Polynom.

Aus der Bedingung (2) folgt:

$$\int_0^1 \int_0^x P_{k-1}(t) dt dx + C = 0$$

und C , sowie P_k , ist damit eindeutig bestimmt.

Def. IV.41. $\forall k \geq 0$, $B_k(x) = k! P_k(x)$

Mit dieser Definition folgt:

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Sei $B_0 = 1$. Für alle $k \geq 2$

definieren wir B_{k-1} rekursiv:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0. \quad (\text{V.42})$$

Also: $B_0 = 1,$

$$B_0 + 2B_1 = 0,$$

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0$$

o.S.W.

§ 5.3 V.43. $B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}.$

Beweis: Für $k=0$ folgt $B_0(x) = 1.$

Sei also $k \geq 1.$ Es genügt zu zeigen,

dass $\int_0^1 B_k(x) dx = 0 \quad \forall k \geq 1$

und $B'_k(x) = k B_{k-1}(x) \quad \forall k \geq 1.$

Zun ersten :

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_k(x) dx &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i \int_0^1 x^{k-i} dx \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i \frac{1}{(k-i+1)}\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\binom{k}{i} \frac{1}{k-i+1} &= \frac{k!}{i! (k-i+1)!} = \frac{1}{k} \frac{(k+1)!}{i! (k-i+1)!} \\ &= \frac{1}{k} \binom{k+1}{i}\end{aligned}$$

Folglich:

$$\int_0^1 B_k(x) dx = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} B_i$$

||
0 nach I. 42.

Zum zweiten:

$$B'_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i (k-i) x^{k-i-1}$$

Nun ist für $0 \leq i \leq k-1$:

$$\binom{k}{i} (k-i) = \frac{k!}{i! (k-i-1)!} = k \cdot \binom{k-1}{i}$$

Woraus folgt:

$$B'_k(x) = k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} B_i x^{k-1-i}$$

$$= k B_{k-1}(x).$$

QED

Bemerkung II. 43 Für $k \geq 2$:

$$B_k(1) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i + B_k$$

$$= B_k \text{ nach II. 42}$$

$$-\sqrt{-77} -$$

$$= B_n(0), \text{ nach Satz V.43.}$$

Zur Aussage der Summationsformel
definieren wir für $k \geq 1$

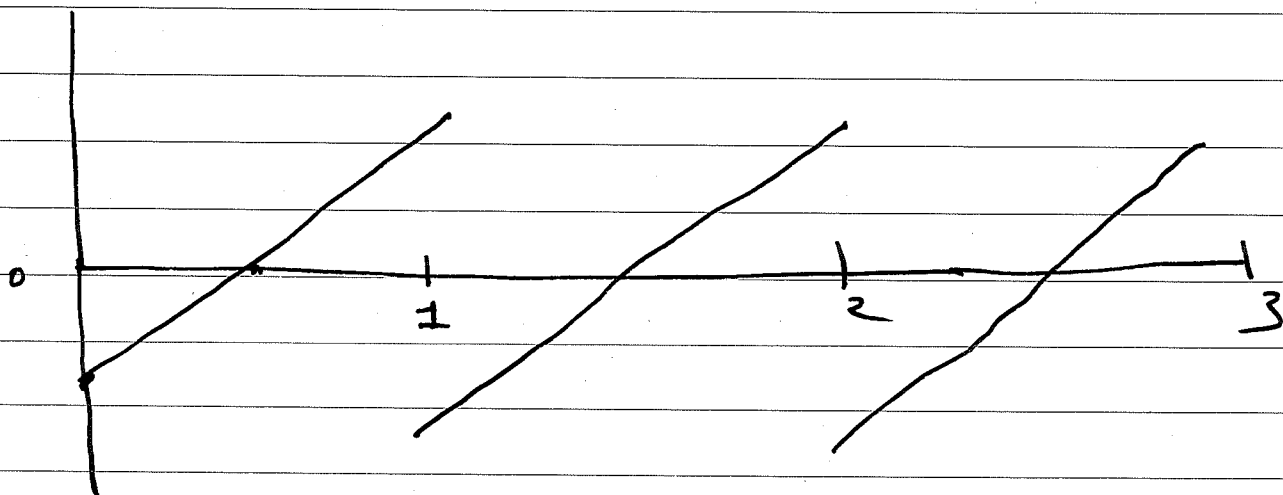
$$\tilde{B}_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{als } \tilde{B}_k(x) = B_k(x) \text{ für } 0 \leq x < 1$$

$$\tilde{B}_k(x) = B_k(x-n) \text{ für } n \leq x < n+1$$

wobei $n \geq 1$.

Zum Beispiel für $\tilde{B}_1$:



$$- \underline{V} - 78 -$$

Satz V.45 Sei $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$

k -mal stetig differenzierbar, $k \geq 1$.

Dann gilt:

(1) Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x) dx$$

(2) Für $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(i) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) - f(0)) \\ &\quad + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) \\ &\quad + \tilde{R}_k \end{aligned}$$

-V- 75 -

Wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Beweis:

Für $k=1$; unter Benutzung von IV. 31:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) B_1'(x) dx$$

$$= B_1(1) f(1) - B_1(0) f(0)$$

$$- \int_0^1 f'(x) B_1(x) dx$$

Da $B_1(x) = x - 1/2$ folgt:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) + f(0)) - \int_0^1 f'(x) B_1(x) dx.$$

- V - 80 -

Die Idee ist jetzt diese Formel
auf die Funktionen

$$g_i(x) = f(x+i-1), \quad x \in [0, 1]$$
$$1 \leq i \leq n$$

anzuwenden.

D.h.

$$\int_0^1 g_i(x) dx = \frac{1}{2} (g_i(1) + g_i(0)) - \int_0^1 g_i'(x) B_1(x) dx$$

Von it:

$$\int_0^1 g_i(x) dx = \int_0^1 f(x+i-1) dx = \int_{i-1}^i f(x) dx$$

(V.34)

$$\frac{1}{2} (g_i(1) + g_i(0)) = \frac{1}{2} (f(i) + f(i-1))$$

$$\int_0^1 g_i'(x) B_1(x) dx = \int_0^1 f'(x+i-1) B_1(x) dx$$

$$- \sqrt{-81} -$$

$$= \int_{i-1}^i f'(x) B_1(x - (i-1)) dx$$

$$= \int_{i-1}^i f'(x) \tilde{B}_1(x) dx.$$

Also gilt für alle $1 \leq i \leq n$:

$$\int_{i-1}^i f(x) dx = \frac{1}{2} (f(i) + f(i-1)) - \int_{i-1}^i f'(x) \tilde{B}_1(x) dx.$$

Wir summieren von $i=1$ bis $i=n$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= \frac{1}{2} f(0) + (f(1) + \dots + f(n-1)) + \frac{1}{2} f(n) \\ &\quad - \int_0^n f'(x) \tilde{B}_1(x) dx. \end{aligned}$$

Woraus

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(n) + f(0)) + \int_0^n f'(x) \tilde{B}_1(x) dx$$

folgt.

$k \geq 2$: Wir fangen bei

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) + f(0)) - \int_0^1 f'(x) B_1(x) dx$$

und wenden partielle Integration auf

$$\int_0^1 f'(x) B_1(x) dx \text{ an:}$$

$$\int_0^1 f'(x) B_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) \cancel{B_1(x)} B_2'(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ f'(1) B_2(1) - f'(0) B_2(0) - \int_0^1 f''(x) B_2(x) dx \right\}$$

- V-83 -

Nun ist nach X.43 für $k \geq 2$

$$B_k(1) = B_k(0) = B_k.$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) B_1(x) dx &= \frac{1}{2} (B_2 f'(1) - B_2 f'(0)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f''(x) B_2(x) dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

~~4~~
~~2~~
~~2~~

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} (f(1) + f(0)) - \frac{B_2}{2!} (f'(1) - f'(0)) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 B_2(x) f''(x) dx \end{aligned}$$

Wir können jetzt diesen Prozess iterieren

und erhalten

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) + f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!} (f^{(j)}(1) - f^{(j)}(0)) + \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Wir wenden jetzt wie im Fall $k=1$

diese Formel auf $g_i(x) = f(x+i-1)$

an und ~~summieren von $i=1$ bis $i=n$~~

erhalten nach einfachen Verschiebungen

(V. 34):

$$\int_{i-1}^i f(x) dx = \frac{1}{2} (f(i) + f(i-1)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!} (f^{(j)}(i) - f^{(j)}(i-1)) +$$

- IV-85 -

$$+ \frac{(-1)^k}{k!} \int_{i-1}^i \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Wenn wir diese Gleichung von $i=1$
 nach $i=n$ summieren dann folgt
 insbesondere für den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!} (f^{(j)}(i) - f^{(j)}(i-1)) \\ &= \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!} \underbrace{\sum_{i=1}^n (f^{(j)}(i) - f^{(j)}(i-1))}_{(f^{(j)}(n) - f^{(j)}(1))} \end{aligned}$$

und die Formel ist bewiesen.

$\square$