

Bemerkung IV.46

Man kann zeigen, dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{2!} - \dots$$

positiven Konvergenzradius besitzt.

$$\text{Sei } e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Dann ist

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

Das Cauchy Produkt von $f(x)$ und

$$\frac{e^x - 1}{x} \text{ ist dann:}$$

- V - 87 -

$$1 + x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + x^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$= 1$$

Unter Benützung von V. 42.

Also ist

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Folglich:

$$f(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{x}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{e^x - 1} \right\}$$

$$= \frac{x}{2} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + 1}{e^{\frac{x}{2}} - 1} \right) = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

Also ist $g(x) = f(x) + \frac{x}{2}$ eine Gerade Funktion

$$- \underline{V} - 88 -$$

d.h. $g(x) = g(-x)$

und folglich ist

$$g^{(2n+1)}(0) = 0 \quad n \geq 0$$

Insbesondere folgt

$$B_{2n+1} = 0 \quad n \geq 1.$$

Anwendung V. 47

Die einfachste Anwendung der Euler MacLaurin Summationsformel ist auf

die Berechnung von

$$1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l \quad \text{wobei } l \geq 1, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Angewandt auf $f(x) = x^l$ und $k = l+1$

- V - 89 -

Folgt für alle $l \geq 1$:

$$1^l + 2^l + \dots + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^l (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

Die Herleitung wird als wichtige Übung
gelassen.

IV. 7. Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel, oder dessen geläufige Version, ist eine qualitative Aussage über das Verhalten der Fakultät:

$$n \mapsto n!$$

Nämlich
$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \, n^n}{e^n}$$

d.h.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! / \left(\frac{\sqrt{2\pi n} \, n^n}{e^n} \right) = 1$$

Für eine Approximation von $n!$ ist dies nicht so nützlich, da wir nicht wissen, wie schnell obige Folge gegen 1 konvergiert.

Mittels der Euler-McLaurin Formel
werden wir jetzt folgende präzisere
Aussage beweisen:

Satz V. 48

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei $|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1.$

Sei $n \geq 1$ und $f(x) = \ln(x+n)$,
 $x \geq 0$. Wir wenden die Summations-
formel (Satz V. 45 (2)) auf die
Summe

$$\sum_{i=1}^{m-n} f(i) \quad \text{und} \quad k=3 \quad \text{an}$$

wobei $m \geq n+1 \geq 2$.

In diesem Fall nimmt die Formel folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-n} f(i) &= \int_0^{m-n} f(x) dx + \frac{1}{2} (f(m-n) - f(0)) \\ &+ \frac{B_2}{2!} (f'(m-n) - f'(0)) \\ &- \frac{B_3}{3!} (f^{(2)}(m-n) - f^{(2)}(0)) \\ &+ \frac{1}{3!} \int_0^{m-n} \tilde{B}_3(x) f^{(3)}(x) dx. \end{aligned}$$

Aus der Rekursionsformel IV.42. 3. B.

sieht man leicht, dass

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0.$$

Aus $f(x) = \ln(x+n)$ folgt:

- IV - 93 -

$$f'(x) = \frac{1}{x+n}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x+n)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+n)^3}.$$

Somit folgt:

$$\frac{1}{2} (f(m-n) - f(n)) = \frac{1}{2} (\ln m - \ln n)$$

$$\frac{B_2}{2!} (f'(m-n) - f'(n)) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right).$$

$$-\frac{B_3}{3!} (f^{(2)}(m-n) - f^{(2)}(n)) = 0.$$

Wir werden jetzt $\int_0^{m-n} f(x) dx$ berechnen.

Aus Korollar V.34 (i) folgt:

$$\int_0^{m-n} \ln(x+n) dx = \int_n^m \ln(x) dx.$$

Wir betrachten jetzt eine Stammfunktion
von $\ln(x)$ ~~wie folgt~~ durch partielle

Integration:

$$\begin{aligned} & \int_1^x \ln(t) dt \\ &= \int_1^x \underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{1}_{v'(t)} dt \end{aligned}$$

wobei $v(t) = t$. Also folgt

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) \cdot 1 dt &= \ln(x) \cdot x - \ln(1) \cdot 1 \\ &\quad - \int_1^x \frac{1}{t} t dt \end{aligned}$$

$$= x \ln x - x + 1.$$

- V - 99 -

Also ist $F(x) = x \ln x - x$ Stammfunktion von $\ln x$.

Aus Thm V. 29 folgt also.

$$\begin{aligned} \int_0^{m-n} \ln(x+n) dx &= \int_n^m \ln(x) dx \\ &= (m \ln m - m) - (n \ln n - n). \end{aligned}$$

Sei ~~best~~ richtig:

$$R_3(m, n) := \frac{1}{3!} \int_0^{m-n} \tilde{B}_3(x) f^{(3)}(x) dx.$$

Wir wollen $|R_3(m, n)|$ nach oben abschätzen und zeigen, dass es mit m und n gross, klein wird. Für $f^{(3)}(x)$ haben wir schon expliziten Ausdruck

- V - 96 -

und es folgt:

$$\begin{aligned} |R_3(m, n)| &= \frac{1}{6} \left| \int_0^{m-n} \tilde{B}_3(x) \frac{2}{(x+n)^3} dx \right| \\ &= \frac{1}{3} \left| \int_n^m \tilde{B}_3(x-n) \frac{1}{x^3} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \int_n^m |\tilde{B}_3(x-n)| \frac{1}{x^3} dx \\ &\leq \frac{1}{3} \sup_{y \geq 0} |\tilde{B}_3(y)| \int_n^m \frac{1}{x^3} dx \\ &= \frac{1}{6} \sup_{y \geq 0} |\tilde{B}_3(y)| \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Behauptung: $|\tilde{B}_3(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \forall x \geq 0$

Die Funktion $\tilde{B}_3$ war definiert

als
$$\tilde{B}_3(x) = B_3(x-l)$$

wobei $l \leq x < l+1$, $l \in \mathbb{N}$.

Für das Bernoulli-Polynom

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$$

müssen wir also zeigen, dass

$$|B_3(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \forall x \in [0, 1].$$

$$\text{Sei } B_3'(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$B_3''(x) = 6x - 3.$$

Dann hat B_3' genau zwei Nullstellen:

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

und beide liegen in $]0, 1[$.

$$\text{Nun ist } B_3''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$$

$$B_3''\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$-\sqrt{V} - g_2 -$$

Aus Korollar IV.46 folgt, dass $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ lokale Maximalstelle und $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ lokale Minimalstelle von B_3 ist.

Die entsprechenden Werte sind:

$$B_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

$$B_3\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Des Weiteren ist

$$B'_3(x) > 0 \quad \text{auf} \quad \left[0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right[$$

$$B'_3(x) < 0 \quad \text{auf} \quad \left]\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right[$$

$$B'_3(x) > 0 \quad \text{auf} \quad \left]\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right].$$

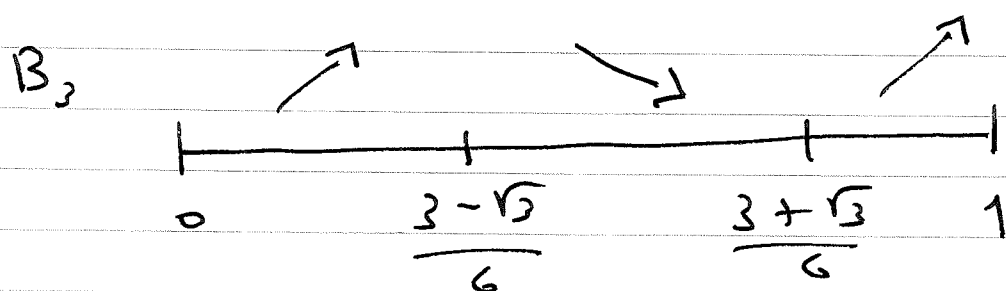
Also ist B_3 :

strikt monoton wachsend auf $\left[0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right]$

strikt monoton fallend auf $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right]$

ist monoton wachsend auf $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right]$.

Bildlich stellen wir dies wie folgt dar:



Da ausserdem $B_3(0) = 0$, $B_3(1) = 0$ folgt, dass

$$-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq B_3(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \forall x \in [0, 1]$$

und somit $|B_3(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \forall x \in [0, 1]$.

und die Behauptung ist bewiesen.

Es folgt unmittelbar:

Lemma V.43 $\forall m \geq n+1 \geq 1$:

$$|R_3(m, n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Wir kommen zu der Summationsformel zurück und betrachten jetzt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{m-n} f(i) &= \sum_{i=1}^{m-n} \ln(i+n) \\
 &= \ln(n+1) + \dots + \ln(m) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^m \ln(i) \right) - \left(\sum_{j=1}^n \ln(j) \right) \\
 &= \ln(m!) - \ln(n!) .
 \end{aligned}$$

Daraus schließen wir folgende explizite Form der Summationsformel:

$$\begin{aligned}
 \ln(m!) - \ln(n!) &= (m \ln m - m) - (n \ln n - n) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\ln m - \ln n) \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \\
 &\quad + R_3(m, n) .
 \end{aligned}$$

$$-\sqrt{1} - 101 -$$

Sei nun $\gamma_n := \ln(n!) - (n \ln n - n) - \frac{1}{2} \ln n$

Dann folgt

$$\gamma_m - \gamma_n = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) + R_3(m, n). \quad (*)$$

Mit Lemma II.49 folgt insbesondere:

$$|\gamma_m - \gamma_n| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) + \frac{\sqrt{5}}{216} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right)$$

Woraus folgt, dass $(\gamma_m)_{m \geq 1}$ eine Cauchyfolge bildet. Sei

$$\gamma := \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m$$

dessen Grenzwert. Aus (*) folgt

$$\text{dass} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} R_3(m, n) := -R_3(n)$$

existiert. Wir erhalten somit:

$$-\frac{1}{12n} + R_3(n)$$

$$\gamma - \gamma_n = -\frac{1}{12n} + R_3(n)$$

oder
$$\gamma_n = \gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)$$

d.h.

$$\ln(n!) - (n \ln n - n) - \frac{1}{2} \ln n = \gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)$$

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} \exp\left(\gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)\right).$$

$$= \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} e^\gamma \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right).$$

Wir müssen zuletzt noch e^γ bestimmen!

Die Idee ist:

$$e^\gamma = \frac{e^\gamma \cdot e^\gamma}{e^\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\gamma_n} \cdot e^{\gamma_n}}{e^{\gamma_{2n}}}.$$

Da nach Definition von δ_n :

$$e^{\delta_n} = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

folgt:

$$\frac{e^{\delta_n} \cdot e^{\delta_n}}{e^{\delta_{2n}}} = \frac{n! n! e^{2n}}{n^{2n} \cdot n} \cdot \frac{(2n)^{\sqrt{2n}}}{(2n)! e^m}$$

$$= \frac{(2^n \cdot n!) (2^n \cdot n!)}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Dann folgt:

$$\left(\frac{e^{\delta_n} \cdot e^{\delta_n}}{e^{\delta_{2n}}} \right)^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)}_{\substack{\downarrow \text{Wallis} \\ \pi/2}} (2n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{n}$$

$\downarrow$
4

Woraus

$$(e^{\gamma})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\gamma_n} e^{\gamma_n}}{e^{\gamma_{2n}}} \right)^2 = 2\pi$$

und somit $e^{\gamma} = \sqrt{2\pi}$ folgt.