

V.8. Uneigentliche Integrale.

2

Der Begriff des Riemann Integrals $\int_a^b f(x) dx$ setzt voraus, dass $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist. Unter gewissen Voraussetzungen kann man diese Einschränkungen umgehen.

Def. V.50 Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

beschränkt und integrierbar auf

$[a, b]$ für alle $b > a$.

Falls $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

existiert bezeichnen wir den Grenzwert

mit $\int_a^\infty f(x) dx$ und sagen, dass f

auf $[a, +\infty)$ integrierbar ist.

Hier sind zwei wichtige Beispiele:

Beispiel V.51.

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b})$$

$$= 1.$$

$$(2) \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln b & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Somit} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{divergiert} & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Es ist natürlich meistens so, dass wir keine explizite Stammfunktion für f

angeben können. Darum brauchen wir Kriterien um Integrierbarkeit auf $[a, \infty)$ nachzuweisen.

Lemma V.52 Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$.

(1) Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $\int_a^\infty g(x) dx$ ~~konvergiert~~ ist auf $[a, \infty)$ integrierbar so ist f auf $[a, \infty)$ integrierbar. ~~was es gilt~~

(2) Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x) dx$ divergiert so divergiert $\int_a^\infty f(x) dx$.

Beweis:

(1) Da für alle $t_2 > t_1 > a$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)| dx \leq \int_{t_1}^{t_2} g(x) dx$$

folgt die Aussage aus dem Cauchy Kriterium.

(2) Ist klar.



Beispiele V. 53 Sei $\alpha > 0$:

Wir untersuchen wann $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx$

existiert. Sei $b > 1$.

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \int_1^b \frac{dx}{1+x^\alpha}$$

Von $\forall$ $\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad x \geq 1$

Woraus folgt, dass $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ für

$$-\sqrt{x} - \log$$

$\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert (siehe Lemma V.52, Beispiel V.51 (2)).

Somit konvergiert $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

Folgender Test für Reihenkonvergenz ist sehr nützlich:

Thm. V.54 (MacLaurin 1742)

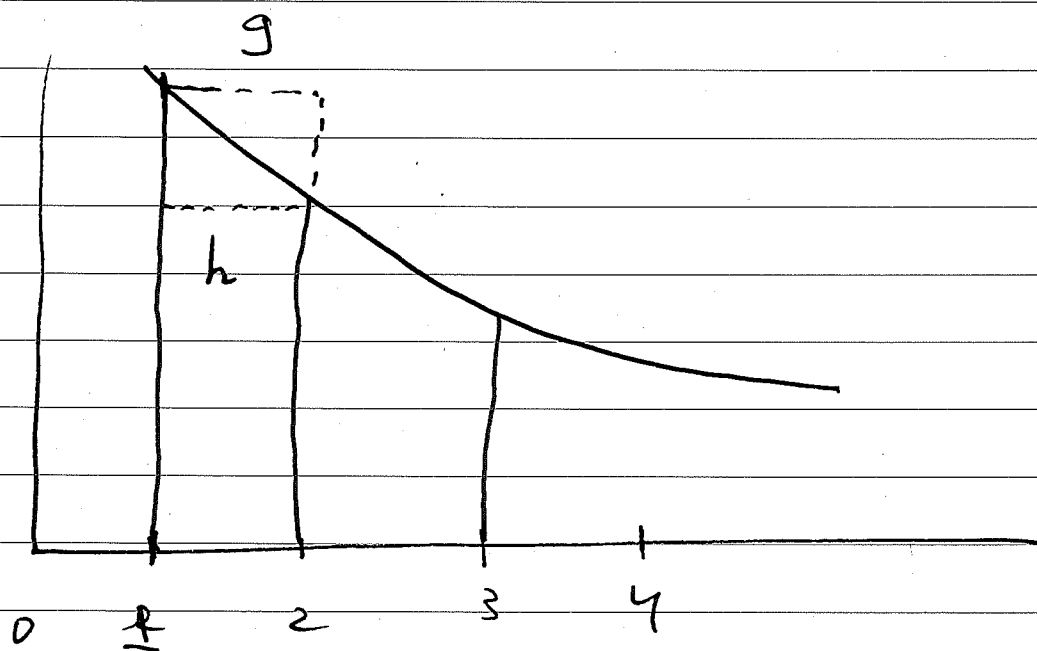
Sei $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend.

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann,

wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert.

-V- 110 -

Beweis:



$$\text{Sei } g(x) := f([x])$$

$$h(x) := f([x]+1)$$

Dann folgt $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq 1$.

Aus der Monotonieität des Integrals folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N f(n) &= \int_1^N h(x) dx \leq \int_1^N f(x) dx \leq \int_1^N g(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} f(n). \end{aligned}$$

Der Satz folgt dann aus ~~aus~~ dem Satz von Weierstrass über monoton wachsende

Folgen:



und Beispiel V.51 (2)

Beispiel V.55: Aus McLaurin folgt für

$\alpha > 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}}_{\frac{1}{\alpha-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Also

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Beispiel V.56 Wann konvergiert, $\beta > 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^{\beta}} \quad ?$$

Nach McLaurin konvergiert diese Reihe

genau dann wenn:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} \quad \text{konvergiert.}$$

Sei also $b > 2$: wir setzen $x = e^u$
wobei $u \in [\ln 2, \ln b]$.

Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} &= \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{e^u u^3} \cdot e^u du \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u^3}. \end{aligned}$$

Aus Beispiel IV.5, (2), folgt, dass

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} \quad \text{und somit}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3} \quad \text{genau dann}$$

konvergiert falls $\beta > 1$.

Eine Situation die zu einem ungentlichen Integral führt ist falls

$$f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ ^{$\varepsilon > 0$} beschränkt und integrierbar ist aber nicht notwendigerweise beschränkt auf $]a, b]$.

Def. V.57 In dieser Situation ist

$$f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar falls}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

existiert; in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet.

Beispiel V.58 : Sei wieder $\frac{1}{x^\alpha}$ für

$$x \in]0, 1].$$

Dann folgt $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} -\ln \varepsilon & \alpha = 1 \\ \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1. \end{cases}$
für $\varepsilon > 0$.

Falls $1 - \alpha > 0$ folgt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$

und falls $1 - \alpha < 0$ divergiert $\varepsilon^{1-\alpha}$

für $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Folglich:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{divergiert für } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1. \end{cases}$$

Übung V.59 : Formuliere und beweise

ein zu Lemma V.52 analoges Lemma

für ein uneigentliches Integral wie in

Def. V.57.

Die Gamma Funktion.

Wurde von Euler definiert; sie ist auf $]0, \infty[$ definiert und "interpoliert" die Funktion $n \rightarrow (n-1)!$.

Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$: wir betrachten

für $b > 0$:

$$\int_0^b x^n e^{-x} dx = \underbrace{b^n e^{-b}}_{f(x) \cdot g'(x)} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\text{Nun ist } \lim_{b \rightarrow \infty} b^n e^{-b} = 0$$

Woraus folgt, dass $x^n e^{-x}$ auf $[0, \infty)$

integrierbar ist und

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

-V-11c-

und folglich

$$\approx n/(n-1) \dots 1 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} dx}_1$$

Folglich: $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Def. IV.60 Für $s > 0$ definieren

wir $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$

Dieses Integral setzt sich im allgemeinen aus zwei uneigentlichen Integralen zusammen.

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx \quad \text{und} \quad \int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Aus $e^{-x} x^{s-1} \leq x^{s-1} \quad x \in]0, 1]$

-IV- 117 -

und Beispiel IV.54 folgt, dass

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$$

für $s > 0$ konvergiert.

Zum zweiten Integral: Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann gibt es M so dass:

$$x^{s-1} \leq M \cdot e^{-x/2} \quad \forall x \geq 1$$

woraus folgt

$$e^{-x} x^{s-1} \leq M e^{-x/2}$$

Da $\int_1^{\infty} e^{-x/2} dx$ konvergiert, folgt

aus Lemma IV.52 (1), dass

$$\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

$$-V - 118 -$$

Es folgt, dass $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$
für alle $s > 0$ konvergiert.

Satz IV.61 (Bohr - M. Riesz).

(1) Die Gamma Funktion erfüllt die
Relationen

$$(a) \quad \Gamma(1) = 1$$

$$(b) \quad \Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad s > 0$$

(c) Γ ist logarithmisch konvex, d.h.

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^{\lambda} \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.

(2) Die Γ -Funktion ist die einzige

Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ die

- V - 117 -

die (a), (b) und (c) erfüllt

Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad \forall x > 0.$$

Als Vorbereitung leiten wir jetzt Ungleichungen her die von allgemeinem Interesse sind.

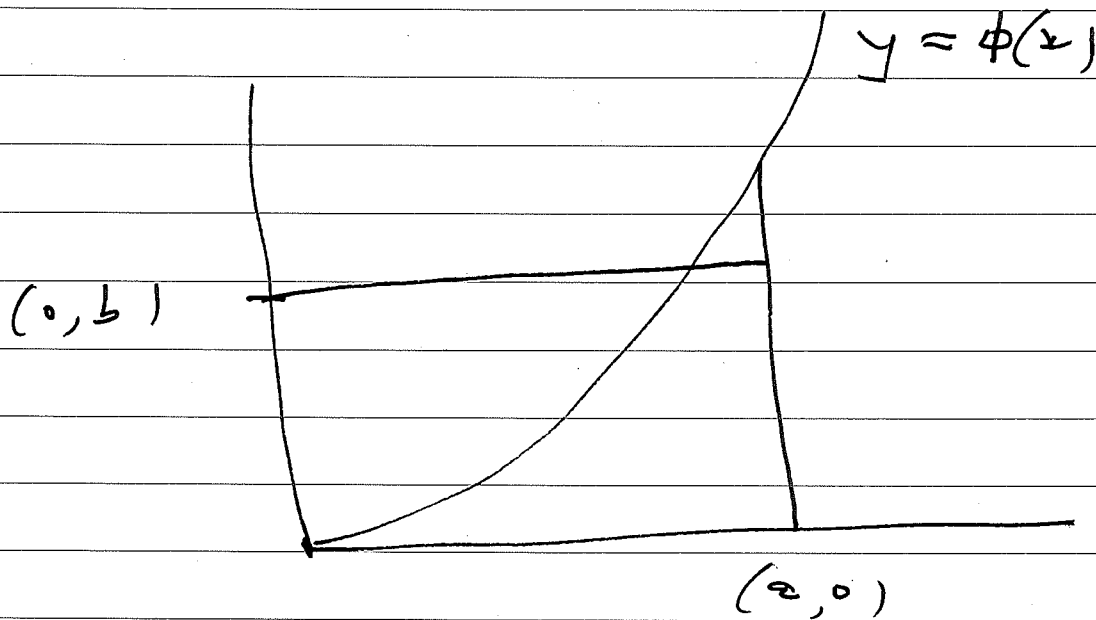
Zunächst die Young'sche Ungleichung.

Sei $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine

stetige strikt monotone wachsende

Bijektion mit $\phi(0) = 0$. Seien $a, b \geq 0$.

- IV - 120 -



Dann ist offensichtlich der Flächeninhalt $a \cdot b$ des Rechtecks mit Ecken

$(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) , $(0,b)$ kleiner (oder gleich)

$$\int_0^a \phi(x) dx + \int_0^b \phi^{-1}(y) dy$$

wobei $\phi^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ die zu ϕ inverse Funktion bezeichnet.

$$-\sqrt{V} \sim 125 -$$

Lemma IV.82 Sei $p > 1$ und $q > 1$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Dann gilt $\forall a, b \geq 0$:

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis: Wende die Youngsche Ungleichung
an auf $\phi(x) = x^{p-1}$. Dann ist
 $\phi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$

und $\int_0^a \phi(x) dx = \frac{a^p}{p}$

$$\int_0^b \phi^{-1}(y) dy = \frac{b^{\frac{1}{p-1} + 1}}{\frac{1}{p-1} + 1}$$

Nun ist $\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q. \quad \square$

Sei $g \in L^q$ mit $a < b$; Sei $p > 1$. Für

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig d. finieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Dann folgt aus Übung 11.3, dass

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0.$$

Satz V.63 (Hölder Ungleichung) Seien $p > 1$

und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Für alle $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass

daß $f \neq 0$ und $g \neq 0$, woraus (siehe oben) $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ folgt.

Die Höung'sche Ungleichung angewandt

auf $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$

gibt:

$$\frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Monotonie der Integrale impliziert:

$$\int_a^b \frac{|f(x)| |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} dx + \frac{1}{q} \int_a^b \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} dx$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

Beweis Satz V.61 :

(1)

∞

$$(a) \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (\text{siehe oben}).$$

(b) Sei $s > 0$ und $b > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^b e^{-x} x^{s+1} \frac{dx}{x} = \int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \underbrace{x^s}_{g(x)} dx \\ &= -e^{-x} b^s + \int_0^b e^{-x} s x^{s-1} dx \end{aligned}$$

Da $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} b^s = 0$ folgt

$$\Gamma(s+1) = s \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = s \Gamma(s).$$

(c) Sei $0 < \lambda < 1$,

$$p = \frac{1}{\lambda}, \quad q = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$f(t) = t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t}, \quad g(t) = t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}$$

Dann folgt aus der Hölder Ungleichung

angewandt auf $f, g: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$

wobei $0 < a < b$:

$$\begin{aligned} & \int_a^b t^{\lambda x + (1-\lambda)y} e^{-t} \frac{dt}{t} = \\ &= \int_a^b f(t) g(t) dt \leq \left(\int_a^b f(t)^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b g(t)^q dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_a^b t^{(x-1)} e^{-t} dt \right)^{\lambda} \left(\int_a^b t^{(y-1)} e^{-t} dt \right)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Mit $a \rightarrow 0^+$ und $b \rightarrow +\infty$ folgt

-V-126-

$$\Gamma(\lambda x + (1-x)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-x}.$$

(e) Wir nehmen an, dass

$$F:]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$$

die Eigenschaften (a), (b), (c) erfüllt.

Aus ~~(a)~~ (b) und vollständige Induktion ergibt sich für alle $x > 0$ und $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x+n) &= (x+n-1) F(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2) F(x+n-2) \\ &= (x+n-1) \cdot \dots \cdot x F(x). \end{aligned}$$

Mit $x=1$ folgt aus (c):

$$F(n+1) = n!.$$

Sei nun $0 < x \leq 1$:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt dann unter
Benutzung von (c):

$$\begin{aligned} F(n+x) &= F(x(n+1) + (1-x)n) \\ &\leq F(n+1)^x F(n)^{1-x} \\ &= (n!)^x ((n-1)!)^{1-x} \\ &= n! \cdot n^{x-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} n! &= F(n+1) = F(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \\ &\leq F(n+x)^x F(n+1+x)^{1-x} \\ &= F(n+x)^x (n+x)^{1-x} F(n+x)^{1-x} \\ &= F(n+x) (n+x)^{1-x} \quad (**), \end{aligned}$$

Aus (*) und (**) folgt:

$$\frac{n! (n+x)^x}{(n+x)} \leq F(n+x) \leq \frac{n! n^x}{n}$$

Mit

$$F(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1) F(x)$$

folgt:

$$\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \left(\frac{n+x}{n} \right)^x \leq F(x) \leq \frac{n! n^x}{x \cdots (x+n)} \left(\frac{n+x}{n} \right)$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty}$ folgt für $0 \leq x \leq 1$:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Gleichung für alle $x > 0$ gilt: Sei $n \geq 1$, wir nehmen an sie gilt $\forall x \in [n-1, n]$.

-V- 125 -

Dann folgt für $n-1 < x \leq n$:

$$F(x+1) = x F(x)$$

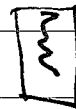
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1) \cdots (x+n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)} \left(\frac{x+n+1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+1+n)}$$

Also ist F eindeutig durch

(a), (b), (c) bestimmt ~~heraus~~



$F = \Gamma$ folgt.