V.9 Das unbestimmte Integral.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f (siehe Satz V.26); wir schreiben in diesem Fall:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral ist die Umkehroperation zur Ableitung und die Integrationskonstante deutet an, das wir jede andere Stammfunktion erhalten können, indem wir zu einer bekannten Stammfunktion eine beliebige Konstante addieren.

Mit dieser Notation lassen sich die Berechnung vieler Ableitungen wie folgt ausdrücken:

$$\int x^s \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{s+1}}{s+1} + C & s \neq -1 \\ \ln x + C & (x > 0). \end{cases}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh}(x) + C'.$$

Die Formel für $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

führt dann zu:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f'g \, . \quad \text{(Partielle Integration)}$$

Die Formel für $(F \circ \phi)'(u) = F'(\phi(u))\phi'(u)$

führt zu folgender Integrationstechnik:

Sei $F(x) = \int f(x)\,dx$

dann ist mit $x = \phi(u)$,

$$F \circ \phi(u) = \int f(\phi(u))\,\phi'(u)\,du.$$

Mit anderen Worten: um das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx$$

zu berechnen tätigen wir eine Substitution

$$x = \phi(u)$$

und ersetzen im $\int$:

$$f(x) = f(\phi(u))$$
$$dx = \phi'(u)\,du$$

Beispiele V.64.

(1) $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{1}_{g'(x)} dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} x$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1$$

$$= x \ln x - x$$

$$=.$$

(2) $$\int \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\ln x}_{f(x)} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

(3) $$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\sin x}_{g'(x)} dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)} dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x$$

Also ist:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x.$$

(4) $I_n = \int \sin^n x \, dx \qquad n \geq 1.$

Sei $f'(x) = \sin x \qquad g(x) = \sin^{n-1} x.$

Partielle Integration liefert:

$$I_n = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x = -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x \, (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx.$$

Mit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ erhalten wir:

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n .$$

Somit:

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

Falls n gerade ist reduziert es auf den Fall $I_0 = \int dx = x$ und falls n ungerade ist, reduziert es auf den Fall $I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$.

$$(5) \quad J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} .$$

Sei $f'(x) = 1$, $g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

$$J_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + n \int \frac{2x^2 \, dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Sei $2x^2 = 2(1+x^2) - 2$.

Dann ist

$$\int \frac{2x^2\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$- \int \frac{2\,dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Also:

$$J_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,J_n - 2n\,J_{n+1}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) J_n .$$

Dann reduziert sich die Berechnung von J_n auf

$$J_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x).$$

Beispiel V. 65

(1) $$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx \quad : \quad x = a\cdot u$$
$$dx = a\,du$$

$$= \int \frac{1 \quad a\cdot du}{a^2(1+u^2)}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan(u) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

(2) $$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx \quad : \quad x = r\sin\theta$$
$$dx = r\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2(1-\sin^2\theta)}\quad r\cos\theta\,d\theta$$
$$= r \int \cos^2\theta\,d\theta$$

Nun ~~ist~~ ~~[illegible]~~ kann man hier die Verdoppelungsformel benützen:

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

oder $$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

Also:
$$r^2\int \cos^2\theta \, d\theta = r^2 \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)$$

$$\cancel{= \frac{r^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{r} + \right.}$$

Dann ist $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$

und $$\frac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}$$
$$= \frac{x}{r^2}\sqrt{r^2-x^2}$$

Also
$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$:

Sei $x = a\tan(\theta)$

$$dx = \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

Also $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{1}{a^3\,(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\,\frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin\theta .$$

Aus $\dfrac{x}{a} = \tan\theta$ folgt

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\frac{x^2}{a^2}$$

Also $\dfrac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)} = \frac{x}{a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} .$$

(4) $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

mit $x = \cancel{\sinh(t)}\ \cosh(t)$, $\quad x^2 - 1 = \cosh^2(t) - 1$

$$= \sinh^2(t)$$

$$dx = \sinh(t)\,dt$$

Also : $\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt$.

Durch partielle Integration:

$$\int \underbrace{\sinh(t)}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\sinh(t)}_{g(t)}\, dt = \cosh(t)\sinh(t) - \int \cosh^2 t\, dt$$

$$= \cosh(t)\sinh(t) - \int (\sinh^2(t) + 1)\, dt$$

Also:

$$\int \sinh^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(\cosh(t)\sinh(t) - t\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh}(x)}{2}$$

Stammfunktionen von Rationalen Funktionen.

Sei $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion. Dann lässt sich $\int R(x)dx$ als elementare Funktion d.h. Funktionen die aus Polynome, rationale, exponentiale, logarithmische ~~und~~, trigonometrische und inverse trigonometrische bestehen. Wir verzichten hier auf eine präzise Definition, und zeigen aber wie die Rechnung im Prinzip ausgeführt wird.

Sie besteht aus drei Schritten

– Reduktion auf den Fall wo

$$\text{grad } P < \text{grad } Q.$$

– Zerlegung von Q in lineare und quadratische Faktoren, und Partialbruchzerlegung von R.

– Integration der Partialbrüche.

Sei $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Falls $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$ wenden wir den euklidischen Algorithmus an:

$$P(x) = S(x)\,Q(x) + \hat{P}(x)$$

wobei $\operatorname{grad} \hat{P} < \operatorname{grad} Q$.

Dann ist $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{\hat{P}(x)}{Q(x)}$

und eine Stammfunktion von $S(x)$ lässt sich leicht finden.

Zweiter Schritt: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

wobei $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$.

Wir können annehmen, dass

$$Q(x) = x^n + \dots ,$$

wobei $n = \operatorname{grad}(Q)$.

Seien $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_\ell \pm i\beta_\ell$,

sowie $\gamma_1, \dots, \gamma_e$

die paarweise verschiedenen Würzeln von Q wobei $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ reel und $\beta_j \neq 0$.

Dann zerlegt sich Q in ein Produkt:

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{m_j} \prod_{j=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_j} \qquad (*)$$

<u>Satz V.66.</u> Seien P, Q polynome mit $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$ und Q mit Produktzerlegung $(*)$. Dann gibt es A_{ij}, B_{ij}, c_{ij} reelle Zahlen mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij} x)}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2 \right)^j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}.$$

Der Algorithmus geht wie folgt:

Sei $Q_1(x) = (x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2$

und $Q(x) = Q_1(x)^{m_1} q(x)$.

Behauptung: es gibt A, B und ein Polynom p mit $\operatorname{grad}(p) \leq \operatorname{grad}(Q) - 1$ und:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A+Bx}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{p(x)}{Q_1(x)^{m_1-1} q(x)}.$$

Wir suchen also eine Lösung von

$$P(x) = (A+Bx)q(x) + p(x)Q_1(x).$$

Nun ist $Q_1(\alpha_1 \pm i\beta_1) = 0$

und $q(\alpha_1 \pm i\beta_1) \neq 0$.

Wir erhalten zwei Gleichungen

$$P(\alpha_1 + i\beta_1) = \left(A + B(\alpha_1 + i\beta_1)\right) q(\alpha_1 + i\beta_1)$$

$$P(\alpha_1 - i\beta_1) = \left(A + B(\alpha_1 - i\beta_1)\right) q(\alpha_1 - i\beta_1)$$

Dieses System hat eine eindeutige Lösung in den Unbekannten A, B da die Determinante des Systems

~~gleich~~

$$A + B(\alpha_1 + i\beta_1) = \frac{P(\alpha_1 + i\beta_1)}{q(\alpha_1 + i\beta_1)}$$

$$A + B(\alpha_1 - i\beta_1) = \frac{P(\alpha_1 - i\beta_1)}{q(\alpha_1 - i\beta_1)}$$

gleich $-2i\beta_1 \neq 0$ ist.

Dies bestimmt eindeutig A und B. Nun folgt aber, dass $\alpha_1 + i\beta_1$ und $\alpha_1 - i\beta_1$ Wurzeln von

$P(x) - (A + Bx)\, q(x)$ sind.

Somit ist er durch $Q_1(x)$ ~~dividier~~ Teilsor und dies bestimmt $p(x)$ eindeutig.

Der Algorithmus fährt dann induktiv mit

$$\frac{p(x)}{Q_1(x)^{m_1-1}\, q(x)}$$

fort.

Dritte Schritt: die Stammfunktion von

$$\frac{1}{(x-r_i)^j}$$

ist $\ln(x-r_i)$ falls $j=1$ und

$$\frac{-(j-1)}{(x-r_i)^{j-1}}$$

für $j \geq 2$.

Was den allgemeinen Partialbruch

$$\frac{A+Bx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}$$

angeht, zeigen wir

ihn wie folgt:

$$\frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j} + \frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}$$

Der erste Summand ist offensichtlich die Ableitung von:

$$\frac{B}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) \qquad \text{falls } j=1$$

$$\frac{B}{2(1-j)}\,\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{j-1}} \qquad j \geq 2.$$

Was den zweiten Summanden angeht:

$$\int \frac{(A+B\alpha)\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j} = \text{Substitution } x-\alpha = \beta\cdot t$$

$$\int \frac{(A+B\alpha)\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j} = \int \frac{(A+B\alpha)\,\beta\,dt}{\beta^{2j}(t^2+1)^j}$$

$$= \frac{(A+B\alpha)}{B^{2j-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1.)^j}$$

Letzeres Integral haben wir in Beispiel V.64.V behandelt.

Stammfunktionen von $R(e^{\lambda x})$

Hier ist R eine rationale Funktion.

Durch die Substitution

$$u = e^{\lambda x}, \quad du = \lambda e^{\lambda x} dx$$

erhalten wir

$$\cancel{\int R(e^{\lambda x})\,dx = \int R(u) \frac{du}{\lambda u}}$$

$$\cancel{= \int R(u)} \qquad dx = \frac{du}{\lambda u}$$

und somit

$$\int R(e^{\lambda x})\,dx = \int \frac{R(u)}{\lambda u}\,du$$

Da $\frac{R(u)}{\lambda u}$ wieder eine rationale Funktion ist, sind wir auf die Berechnung von Stammfunktionen von rationalen Funktionen zurückgeführt.

Zum Beispiel:

$$\int \frac{1}{3+\cosh(x)}\,dx \qquad \text{Mit } u = e^x$$
$$du = e^x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{3+\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)}\,\frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{2\,du}{u^2+6u+1}$$

Nun ist $u^2+6u+1 = (u-\lambda_1)(u-\lambda_2)$

Wobei $\lambda_1 = -3 + 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -3 - 2\sqrt{2}$.

Die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{u^2 + 6u + 1}$$

ist: $$\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{u + 3 - 2\sqrt{2}} - \frac{1}{u + 3 + 2\sqrt{2}} \right)$$

Folglich:

$$\int \frac{2\, du}{u^2 + 6u + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(u + 3 - 2\sqrt{2})$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(u + 3 + 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{e^x + 3 - 2\sqrt{2}}{e^x + 3 + 2\sqrt{2}} \right).$$

Stammfunktionen von $R(\sin x, \cos x)$

R ist jetzt eine rationale Funktion in zwei Variablen.

Sei $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$

Dann ist

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 = \frac{(1+u)^2(1-u)^2}{(1+u^2)^2}$$

Also $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

Aus $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ folgt

$$\cos x \, dx = \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \, du$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{2}{(1+u^2)} \, du.$$

Also:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

$$= \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2\, du}{(1+u^2)}$$

Jetzt ist $\frac{2}{(1+u^2)} R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)$

eine rationale Funktion von u.

Stammfunktion von $R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}, x\right)$

Wir behandeln hier den Fall $a>0$.

Sei $x = \alpha u + \beta$ wobei wir α, β jetzt bestimmen:

$$ax^2+bx+c = a\alpha^2 u^2 + \alpha(2a\beta + b)u + (a\beta^2 + b\beta + c)$$

Setzte:

$$\beta = -\frac{b}{2a}$$

dann:

$$ax^2+bx+c = a\alpha^2u^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a}$$

Falls $b^2-4ac \gtrless 0$

Definieren wir α durch:

$$\alpha = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und erhalten:

$$ax^2+bx+c = \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)(u^2-1)$$

Somit folgt

$$R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}, x\right) = \tilde{R}\left(\sqrt{u^2-1}, u\right)$$