

I - 15

Wir führen noch zwei Symbole ein $-\infty$ und $+\infty$ und definieren

$$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

Analog definieren wir $]a, +\infty[$ und $]-\infty, a[$.

Def I.12 : Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls $a \leq c \quad \forall a \in A$.

Die Menge A heißt nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke von A gibt.

$$V \sim 15$$

$$\text{Sei } A =]-\infty, 2[= \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

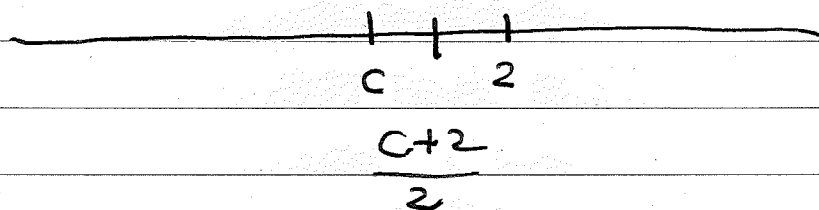
Behauptung: die Menge M der oberen Schranken ist

$$M = [2, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$$

Jedes $c \in [2, +\infty[$ erfüllt per Definition
 $c \geq 2$.

~~ist also~~
 und ist also eine obere Schranke von
 $] -\infty, 2[$.

Sei $c < 2$:



Dann ist $\frac{c+2}{2} \in]-\infty, 2[$ und

aus $c < \frac{c+2}{2}$ folgt, dass c nicht
 obere Schranke von $] -\infty, 2[$ sein kann.

I-16

(ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine untere Schranke von A falls $c \leq a \quad \forall a \in A$. Die Menge A heisst nach unten beschränkt falls A eine untere Schranke besitzt.

(iii) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Maximum von A falls m eine obere Schranke von A ist und zudem $m \in A$.

(iv) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Minimum von A falls m eine untere Schranke von A ist und zudem $m \in A$.

Falls A ein Maximum (resp. Minimum) besitzt wird es mit $\max A$ (resp. $\min A$) bezeichnet.

Beispiel I. 13:

(i) $A =]-\infty, 2[$: A ist nach oben beschränkt. Aber A besitzt kein Maximum: da mit $c \in A$,

$$c < \frac{c+2}{2} \in A$$

folgt, dass keine obere Schranke von A in A enthalten ist.

Die Menge der oberen Schranken von A ist $M = [2, +\infty[$. Sie besitzt ein Minimum: $\min M = 2$.

(ii) $B \setminus A =]-\infty, 2]$: $B \setminus A$ ist nach oben

beschränkt; ~~zudem~~ sie besitzt zudem
ein Maximum, $\max B \setminus A = 2$. Die

Menge der oberen Schranken ist

$$M = [2, +\infty[. \text{ Sie besitzt ein}$$

Minimum: $\min M = 2$.

In beiden Fällen besitzt also die
Menge der oberen Schranken ein
Minimum. Dies ist ein allgemeines

Phänomen:

Satz I. 14 Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Sei A nach oben beschränkt. Dann
gibt es eine kleinste obere Schranke
von A $c := \sup A$

genannt das Supremum von A .

(ii) Sei A nach unten beschränkt.

Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A

$$\alpha := \inf A$$

genannt der Infimum von A .

Beweis:

i.) Sei B die Menge der oberen Schranken von A . Da A nach oben beschränkt

ist gilt $B \neq \emptyset$. Da $A \neq \emptyset$ und

$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq b$ gilt erfüllen

A und B die Voraussetzungen der

Ordnungsvollständigkeitsaxiome V .

Es gibt also $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $c \in B$ und aus der zweiten Ungleichung folgt dass c die kleinste obere Schranke von A ist; mit anderen Worten, die Menge B der oberen Schranken von A besitzt ein Minimum. Dieses Minimum ist also das Supremum $\sup A \in B$ von A .

ii.) Analog. □

Beispiele I.15.

i.) $A = [1, 2[: \sup A = 2, \inf A = 1.$

ii.) $A = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots \right\}$

ist nicht nach oben beschränkt.

Idee:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

iii.) $A = \left\{ 1 - \frac{1}{3}, \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), \dots \right\}$

Dann gilt $\sup A = \frac{\pi}{4}$ (Leibniz).

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)$$

Konvention: Falls A nicht nach oben beschränkt (resp. nicht nach unten beschränkt) ist, definieren

Wir $\sup A = +\infty$

(resp. $\inf A = -\infty$).

Kardinalität

Def. 1.16 (i) zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig, falls es eine Bijektion

$$f: X \rightarrow Y$$

gibt.

(ii) Eine Menge X ist endlich

falls entweder $X = \emptyset$ oder es $n \in \mathbb{N}$

gibt so dass X und $\{1, 2, \dots, n\}$ gleichmächtig

sind.

- I-23 -

Im ersten Fall ist die Kardinalität von X , $\text{card } X = 0$ und im zweiten

$$\text{card } X = n.$$

(iii) Eine Menge X ist abzählbar falls sie endlich ist oder mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig.

Beispiel I. 17: (i) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

(e) Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht endlich.

Dann sind A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig.

Beweisidee: definieren rekursiv:

$$a_0 := \min A,$$

$$a_n := \min A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}, n \geq 1.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{N} \rightarrow A$$

$$n \mapsto a_n$$

eine Bijektion.

- V-23 -.

Sei $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Dann ist $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ abzählbar (und

so sind $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ etc. ...).

Die Abbildung:

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

$$(a, b) \longmapsto 2^a \cdot 3^b$$

ist injektiv.

- I - 24 - .

Im Kapitel über konvergente Folgen
werden wir die Dezimaldarstellung
der reellen Zahlen begründen. Eine
einfache Folgerung dessen wird folgender
Satz sein:

Satz I.18 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht
abzählbar.

I.2. Der euklidische Raum.

Sei $n \geq 1$ und

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \}$$

das n -fache kartesische Produkt

von $\mathbb{R}$. Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$y = (y_1, \dots, y_n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann definieren wir:

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

In der linearen Algebra wurde gezeigt,

dass $\mathbb{R}^n$ bezüglich den Operationen

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum bilden.

- I - 26 - .

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

ist durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

definiert.

Folgende Eigenschaften gelten dann:

$$(1) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(2) \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$(3) \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0 \quad \text{mit}$$

Gleichheit genau dann wenn

$$x = 0.$$

Die Norm des Vektors x ist:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Satz I. 19 (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Außerdem gelten für die Norm noch folgende Aussagen:

Satz I. 20 1.) $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$.

$$2.) \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$3.) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis 3.)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Nun ist aber

C

$$2\langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\| \cdot \|y\|$$

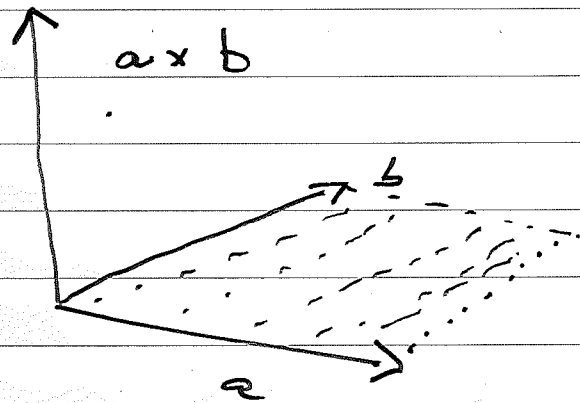
Woraus folgt:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square$$

- I - 28 bis -

Kreuzprodukt: in $\mathbb{R}^3$



$a, b, a \times b$ bilden ein Rechtssystem.

$\|a \times b\| = \text{Flächeninhalt des von } a, b \text{ aufgespannten Parallelogramms.}$

$$(D) \quad (a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

$$(AK) \quad a \times b = -b \times a$$

$$(J) \quad \cancel{a \times b} \times a$$

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0.$$

I.3. Komplexe Zahlen.

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir folgende
Multiplikation:

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Dann gilt insbesondere:

$$(0, 0) (x, y) = (0, 0)$$

$$(1, 0) (x, y) = (x, y).$$

Falls $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$(x, y) \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

Satz I.21 $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Addition
der Vektoren + und obig definiert er
Multiplikation. ist ein kommutativer
Körper mit Einselement $(1, 0)$ und
Nullelement $(0, 0)$.

$\mathbb{R}^2, +, \cdot$ wird Körper der komplexen Zahlen genannt und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (x, 0)$

respektiert die Körperoperationen ;

mittels dieser Abbildung identifizieren

wir $\mathbb{R}$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Sei $i = (0, 1)$; dann besitzt jedes

Element $z \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung

$$z = x + y \cdot i \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung : $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$.

Zusammen mit dem Distributivgesetz -

-gesetz erhalten wir:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 i y_2 i$$

$$= x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i + y_1 y_2 i^2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) \cdot i.$$

Ist also konsistent mit der Definition
des Produktes.

Terminologie: $z = x + y \cdot i$

$x = \operatorname{Re} z$ ist der Realteil von z

$y = \operatorname{Im} z$ ist der Imaginärteil
von z .

Komplexe Konjugation: für $z = x + y i$

definieren wir $\bar{z} := x - y i$.

Satz I.22

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\forall z_1, \forall z_2 \in \mathbb{C}.$$

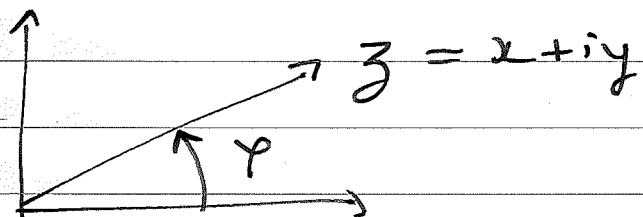
$$(ii) z \overline{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2.$$

Insbesondere folgt aus (ii) dass für

$z \neq 0$, dessen multiplikatives Inverse

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}.$$

Polarform:



$$\text{Sei } r = \|z\| \quad x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

wobei man φ modulo $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

nehmen kann.

Seien nun

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 r_2 & \left([\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] \right. \\ & \left. + [\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2] \cdot i \right) \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen für

$\cos$ und $\sin$ folgt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Inbesondere folgt durch Induktion, dass

$$\text{wenn } z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = r^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi))$$