

Satz I.22

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\forall z_1, \forall z_2 \in \mathbb{C}.$$

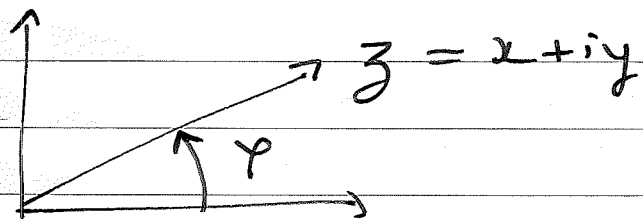
$$(ii) z \overline{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2.$$

Insbesondere folgt aus (ii) dass für

$z \neq 0$, dessen multiplikatives Inverse

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}.$$

Polarform:



$$\text{Sei } r = \|z\| \quad x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

wobei man φ modulo $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

nehmen kann.

In der Darstellung

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nennt sich $r = \|z\|$ der Absolutbetrag

und φ das Argument der Zahl z .

- I -

Seien nun

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 r_2 & \left([\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] \right. \\ & \left. + [\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2] \cdot i \right) \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen für

$\cos$ und $\sin$ folgt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Inbesondere folgt durch Induktion, dass

$$\text{wenn } z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \cdot i$$

$$z^n = r^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi))$$

Korollar I. 23

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann hat die

Gleichung $z^n = 1$ genau n

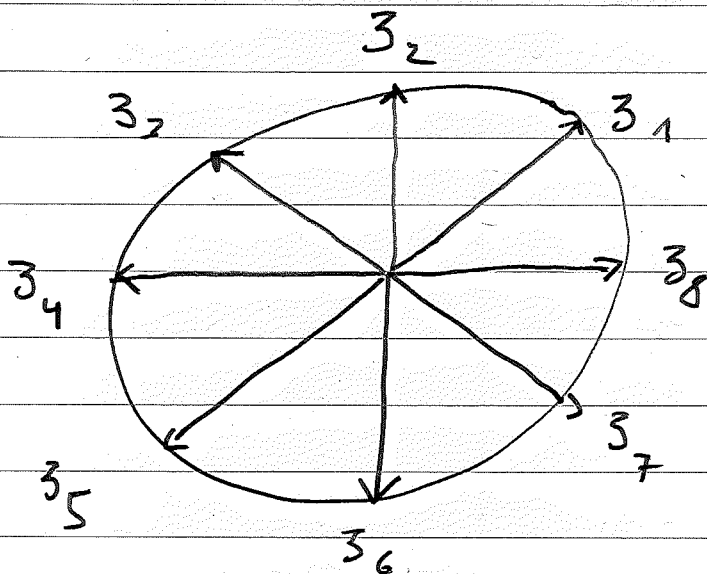
Lösungen in $\mathbb{C}$:

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

wobei:

$$z_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$$

$$1 \leq j \leq n.$$



$$z^8 = 1.$$

Allgemeiner gilt:

Thm I.24 (Fundamentalsatz der Algebra).

Sei $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Dann gibt es $z_1, \dots, z_n$ in $\mathbb{C}$ so

dass

$$P(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Kapitel II Folgen und Reihen.

Der erste grundlegende Begriff der Analysis ist der des Grenzwertes einer Folge. Auf diesem Begriff beruht dann die Theorie der konvergenten Reihen.

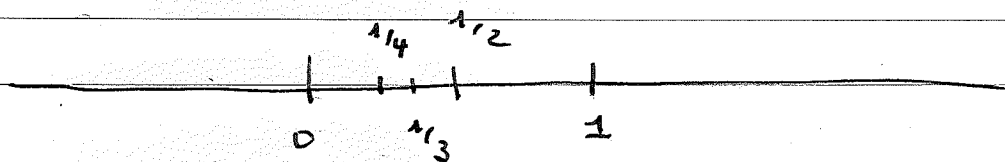
II.1. Grenzwert einer Folge.

Def. II. 1 Eine Folge (reeller Zahlen)

ist eine Abbildung $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

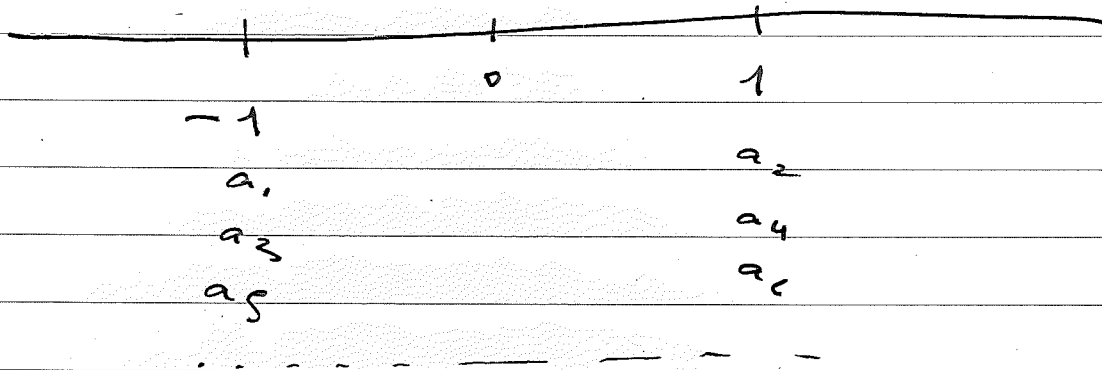
Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$.

Beispiele II. 2 (1) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.



- II - 2 -

$$(2) \quad a_n = (-1)^n, \quad n \geq 1$$



Für den Grenzwertbegriff ist folgender
Lemma von Bedeutung:

Lemma II.3 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge.

Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl

$$l \in \mathbb{R}$$

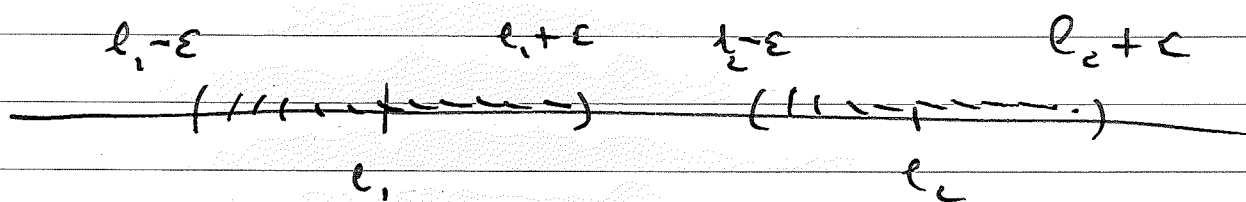
mit der Eigenschaft:

$\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge:

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\}$$

endlich.

Beweis: Wir nehmen an, dass es $l_1 < l_2$ gibt so dass beide l_1, l_2 die Eigenschaft erfüllen.



Sei $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{3}$, dann folgt:

$$(x) \quad (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \cap (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) = \emptyset.$$

Nach Voraussetzung sind

$$E_1 = \{n : a_n \notin (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)\} \subset \mathbb{N}^*$$

und $E_2 = \{n : a_n \notin (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)\} \subset \mathbb{N}^*$

endlich.

Insbesondere ist:

$$\mathbb{N}^* \cap E_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : a_n \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)\}$$

unendlich.

Andererseits folgt aus (*):

$$\mathbb{N}^* \cap E_2 \subset E_1, \text{ ein Widerspruch.} \quad \square$$

Def. II.4 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt

Konvergent, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt

so dass $\forall \varepsilon > 0$, die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\}$$

endlich ist.

Nach Lemma II.3 ist eine solche Zahl l eindeutig bestimmt; sie wird mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

bezeichnet und nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$.

Bemerkung II.5 Jede konvergente Folge ist beschränkt: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent mit Grenzwert l . Dann ist $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt:

Sei $\varepsilon = 1$ und $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin (l-1, l+1)\} = \{i_1, \dots, i_m\}$. Dann folgt:

$$\{a_n : n \geq 1\} \subset (l-1, l+1) \cup \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$$

und ist daher beschränkt.

In folgendem Lemma beweisen wir die Äquivalenz zwischen dem Konvergenzbegriff gemäß Def. II.4 und die historisch erste Definition von Konvergenz; sie wurde von D'Alembert (1715) und Cauchy (1821) formuliert und wird in Konvergenzbeweisen

- II -

oft benutzt.

Lemma II.6 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge.

Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ so dass

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$\{n : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\}$ endlich und

damit gibt es $N \geq 1$ so dass

$$\{n : a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\} \subset \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

Dann folgt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Klar. $\square$

Beispiel II.7 Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$.

d.h. wir betrachten die Folge

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

$$a_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1}.$$

$$\text{Also } |a_n - 1| = \frac{1}{n+1}. \quad \text{Sei } \varepsilon > 0;$$

nach Archimedes gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Dann folgt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Als nächstes untersuchen wir wie die arithmetischen Operationen mit Konvergenz verträglich sind.

Satz

Prop. II.8 Seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$

konvergente Folgen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(1) Dann ist $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ konvergent

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

(2) Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ konvergent

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

(3) Nehmen wir zudem an, dass $b_n \neq 0 \forall n \geq 1$.

und $b \neq 0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$ konvergent

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Beweis: Wir beweisen

$$(2) \quad |a_n b_n - a \cdot b| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ \leq |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|.$$

Da $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gibt es $M \geq 1$

mit $|b_n| \leq M \quad \forall n \geq 1$ (siehe Bem. II.5)

Also $|a_n b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a|M + |b_n - b||a|.$

Sei $\varepsilon > 0$:

- es gibt $N_1 \geq 1$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+|a|} \quad \forall n \geq N_1$

- es gibt $N_2 \geq 1$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|}$

Für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ folgt:

$$|a_n b_n - a b| < \frac{\varepsilon \cdot M}{M+|a|} + \frac{\varepsilon \cdot |a|}{M+|a|} = \varepsilon.$$

□

Beispiel II.9 : $v \in \mathbb{Z}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^v = 1$.

Folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ und wieder-

holte Anwendung von Satz II.8 (2) + (3).

II.2. Der Satz von Weierstrass und Anwendungen.

Def. II.10 (1) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton wachsend

~~und nach oben beschränkt~~

~~Satz $a \leq m \Rightarrow a_n \leq m$~~

falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$.

(2) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend

falls $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$.

Theorem II.11 (Weierstrass).

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend
nach oben beschränkt. Dann konvergiert
 $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{ a_n : n \geq 1 \}.$$

Bemerkung II.12 : Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton
fallend nach unten beschränkt. Dann folgt
analog: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{ a_n : n \geq 1 \}.$

Beweis: Sei $s := \sup \{ a_n : n \geq 1 \}$; $\forall \varepsilon > 0$
dann gibt es $N \geq 1$ so dass

$$s - \varepsilon < a_N$$

Woraus $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall n \geq N$

folgt; insbesondere $|a_n - s| < \varepsilon.$ □

Beispiel II.13: Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 < q < 1$.

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } x_n &= n^a q^n; \text{ dann folgt } x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n \end{aligned}$$

$$\text{Also: } x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$ gibt es ein

$$n_0 \text{ so dass } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \quad \forall n \geq n_0.$$

Es folgt:

$$x_{n+1} < x_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Da $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ ist die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$

nach unten beschränkt und für $n \geq n_0$

monoton fallend. Sei

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q x_n$$

$$= q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot l.$$

Also $(1-q) \cdot l = 0$ woraus $l=0$ folgt.

Beispiel II. 14 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Aus $n \geq 1$ folgt $n^{1/n} \geq 1$. (Argument später)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

folgt aus (Beispiel II. 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$

dass es $N \geq 1$ gibt so dass

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Es folgt $n < (1+\varepsilon)^n$ und somit

$$1 \leq n^{1/n} < 1+\varepsilon$$

Woraus $|n^{1/n} - 1| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ folgt.