$$= q \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = q \cdot \ell$$

Also $(1-q)\cdot \ell = 0$ woraus $\ell = 0$ folgt.

<u>Beispiel II.14</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(i) Aus $n \geq 1$ folgt $n^{1/n} \geq 1$.

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt die Identität:

$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + b\,a^{n-2} + a^{n-1}\right)$$

wie man durch direktes Ausmultiplizieren sieht. Mit $a = 1$ und $b = n^{1/n}$ folgt

$$\underbrace{(n-1)}_{\geq 0} = \left(n^{1/n} - 1\right)\underbrace{\left(n^{1/n(n-1)} + n^{1/n(n-2)} + \cdots + 1\right)}_{\geq 1}$$

woraus $n^{1/n} - 1 \geq 0$ folgt.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $0 < \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Wende Beispiel II.13 mit $a = 1$ und $q = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$ an und erhalte:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0 .$$

Insbesondere gibt es $N \geq 1$ so dass

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \qquad \forall n \geq N$$

Also $n < (1+\varepsilon)^n$.

Nochmalige Anwendung der Identität mit $b = 1+\varepsilon$ und $a = n^{1/n}$ impliziert

$$n^{1/n} < 1+\varepsilon$$

Zusammen mit (1):

$$1 \leq n^{1/n} < 1+\varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

woraus $\left|n^{1/n} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ folgt.

Beispiel II.15 Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$

konvergiert. Der Limes ist

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

die Eulersche Konstante

$$e \approx 2{,}718281828459045235\ldots$$

die die Basis für die natürlichen Logarithmen ist.

Lemma II.16 (Bernoulli Ungleichung).

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad , n \in \mathbb{N}, \ x > -1.$$

<u>Beweis</u> (Induktion)

Für $n = 0$ ist die Aussage $1 \geq 1$.

Sei $n \geq 0$;

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x. \qquad \boxed{}$$

Wir zeigen, dass die Folge

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

monoton fallend ist. Sei $n \geq 2$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \frac{n}{(n+1)}$$

$$= \left[\frac{n^2}{n^2-1}\right]^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left[1+\frac{1}{n^2-1}\right]^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

B

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1}$$

$$> \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 .$$

Dann folgt, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ konvergiert

und somit auch

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

~~und~~ da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

<u>Beispiel II. 17</u> Sei $c > 1$.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ durch:

$$a_1 = c \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \qquad n \geq 1.$$

Dann existiert $a := \lim a_n > 0$ und es gilt $a^2 = c$.

<u>Beweis:</u>

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.

Sei $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_n} - a_n\right) = a_n + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)$.

Wir zeigen zunächst: $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 1$.

Für $n = 1$: $a_1^2 = c^2 > c$ da $c > 1$.

Und für $n \geq 1$:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$= c + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$\geq c.$$

Aus $a_n^2 \geq c$ folgt:

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right) \leq a_n.$$

(ii) Es ist klar: $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Aus $a_n^2 \geq c > 1$ folgt dann

$$a_n^2 > 1 \quad \forall n \geq 1$$

(iii) Nach Weierstrass: sei

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

dann folgt aus (ii) $a \geq 1$

insbesondere $a \neq 0$ und:

$$a = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{c}{\lim a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

woraus $a^2 = c$ folgt.

II. 17 limes superior und limes inferior.

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Weierstrass ist wie man mit jeder beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren kann die dann einen Grenzwert besitzen.

Sei für jedes $n \geq 1$:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$$

und

$$c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Dann gilt offensichtlich:

$$b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$c_{n+1} \leq c_n \quad \forall n \geq 1$$

und beide Folgen sind beschränkt.

Wir definieren:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$$

Aus $b_n \leq c_n$ folgt

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n.$$

<u>Beispiel:</u> $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Dann: $b_n = -1$, ~~k = größte ungerade Zahl~~

$c_n = 1 + \frac{1}{n_g}$, n_g = ~~größte~~ kleinste gerade Zahl $\geq n$

Also $\liminf_{n \to \infty} a_n = -1$

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = +1.$$

II. 3. Das Cauchy Kriterium.

Natürliche Frage: wie sieht man einer Folge an, dass sie konvergent ist ohne ihren Grenzwert zu kennen. Das Cauchy Kriterium ist eine Antwort auf diese Frage.

Zunächst beweisen wir:

Lemma II.17 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und:

$$\liminf a_n = \limsup a_n.$$

Beweis:

($\Longrightarrow$) klar.

($\Leftarrow$) Sei $b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$

$c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$

und $A := \lim b_n = \lim c_n$.

Aus $b_n \leq A \leq c_n$ folgt $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N(\varepsilon) \geq 1$ mit: $\forall n \geq N(\varepsilon)$:

$$A - \varepsilon < b_n \leq A \leq c_n < A + \varepsilon .$$

Also: $A - \varepsilon \leq a_k < A + \varepsilon \quad \forall k \geq n$

woraus $|a_k - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

folgt. $\blacksquare$

Das Cauchy Kriterium:

<u>Satz II. 18</u> Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist genau dann konvergent falls

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\forall n, m \geq N$.

Beweis:

($\Longrightarrow$) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert A. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \geq 1$ so dass

$$|a_n - A| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N.$$

Dann folgt $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)|$$
$$\leq |a_n - A| + |a_m - A|$$
$$< \varepsilon.$$

($\Longleftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$ und $N \geq 1$ so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \ \forall m \geq N.$$

Sei $n \geq N$ fest beliebig. Dann folgt $\forall m \geq N$:

$$a_m - \varepsilon \leq a_n \leq a_m + \varepsilon$$

Sei $k \geq N$; dann folgt:

$$\sup\{a_m : m \geq k\} - \varepsilon \leq a_n \leq \inf\{a_m : m \geq k\} + \varepsilon$$

d.h. $$c_k - \varepsilon \leq a_n \leq b_k + \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

woraus
$$\limsup a_n - \varepsilon \leq \liminf a_n + \varepsilon$$
folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt
$$\limsup a_n \leq \liminf a_n$$
und der Satz ist bewiesen. $\boxed{S}$