II. 4. Der Satz von Bolzano–Weierstrass

In diesem Abschnitt behandeln wir weitere wichtige Folgerungen des Ordnungsvollständigkeitaxioms.

Insbesondere zeigen wir, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Als Vorbereitung zeigen wir ein Lemma von Cauchy–Cantor, dass monoton absteigende Folgen von abgeschlossenen Intervallen betrifft.

<u>Definition II.19</u>: Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ der Form

(1) $[a, b]$ $\quad a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

(2) $[a, +\infty[$ $\quad a \in \mathbb{R}$

(3) $]-\infty, a]$ $\quad a \in \mathbb{R}$.

(4) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Wir definieren die Länge $\mathcal{L}(I)$ des Intervalls als

$$\mathcal{L}(I) = b - a \quad \text{im ersten Fall}$$

$$\mathcal{L}(I) = +\infty \quad \text{in (2) ~~und~~ (3), (4).}$$

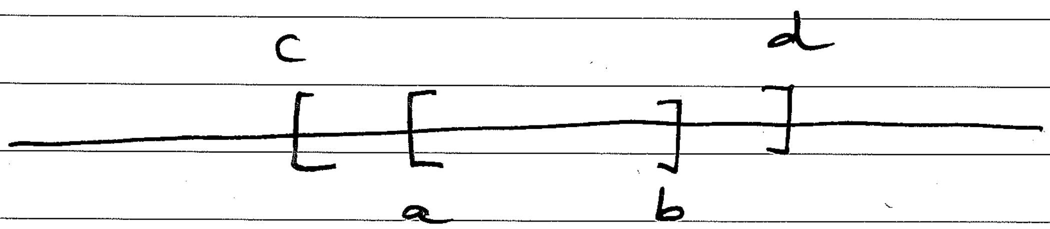
Offensichtlich ist $\mathcal{L}(I) \geq 0$; das abgeschlossene Intervall ist genau dann eine beschränkte Teilmenge

__Bemerkung__: Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen falls für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ aus Elementen in I, der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$ auch in I ist.

von $\mathbb{R}$ falls $\mathcal{L}(I) < +\infty$.

Bemerkung II.20

Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$
mit $a \leq b$ und $c \leq d$, $c, d \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $I \subseteq J$ genau dann
wenn $c \leq a$ und $b \leq d$



Es folgt dann: $\mathcal{L}(I) = b - a \leq d - c$
$= \mathcal{L}(J)$.

Das Lemma von Cauchy – Cantor
handelt von monoton ~~absteigender~~ fallender
Folgen von abgeschlossenen Intervallen.

Eine monoton fallende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist eine Folge $(X_n)_{n \geq 1}$, $X_n \subset \mathbb{R}$ mit

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \cdots$$

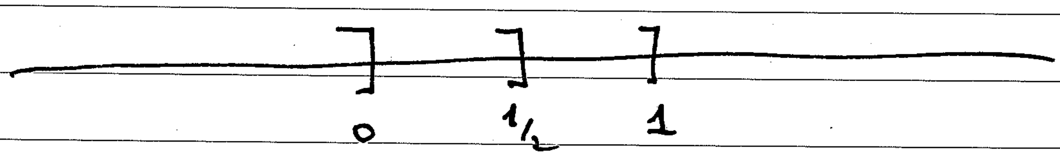
Betrachten wir zwei Beispiele:

Beispiele II.21

(1) Sei $X_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$.

Dann gilt offensichtlich

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$$



und $\bigcap_{n \geq 1} X_n = \emptyset$. (folgt aus Archimedes)

(2) Sei $X_n = [n, +\infty[$

dann gilt $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$

und $\bigcap_{n \geq 1} X_n = \emptyset$ (Archimedes).

<u>Satz II.22</u> (Cauchy – Cantor)

Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$

eine Folge abgeschlossener Intervalle

mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$.

Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Falls zudem $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$

enthält $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einen

Punkt.

<u>Beweis</u>: Sei $I_n = [a_n, b_n]$

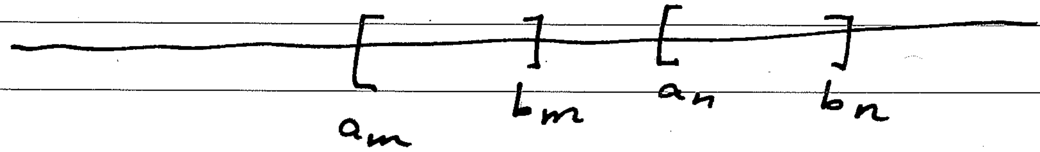
und $I_m = [a_m, b_m]$

wobei $n \geq 1$, $m \geq 1$.

Behauptung: $a_n \leq b_m \quad \forall n \geq 1, \forall m \geq 1$.

Sonst gibt es $n \geq 1$ und $m \geq 1$

mit $b_m < a_n$.



dann würde folgendes gelten:

$$[a_m, b_m] \cap [a_n, b_n] = \emptyset.$$

d.h. $I_m \cap I_n = \emptyset$.

Dies ist ein Widerspruch, denn

es gilt entweder $I_m \subset I_n$ oder

$I_n \subset I_m$.

Seien $A = \{ a_n : n \geq 1 \} \neq \emptyset$

$B = \{ b_m : m \geq 1 \} \neq \emptyset$.

Dann erfüllen A und B die Voraussetzungen des Axioms V und deswegen gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \geq 1$$

Woraus

$$c \in \bigcap_{n \geq 1} I_n \quad \text{folgt.}$$

Zur zweiten Aussage: aus

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1} \subseteq I_n = [a_n, b_n]$$

folgt

$$\mathcal{L}(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - a_n = \mathcal{L}(I_n)$$

und (Weierstrass) folglich existiert

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}(I_n) \geq 0.$$

Falls es jetzt $c_1 < c_2$ gibt

mit $\{c_1, c_2\} \subseteq \bigcap_{n \geq 1} I_n$

dann folgt

$$[c_1, c_2] \subseteq I_n \quad \forall n \geq 1$$

und somit

$$0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n = \mathcal{L}(I_n).$$

Dies beweist die zweite Aussage. $\boxed{\Xi}$

Als Anwendung zeigen wir:

__Satz II.23__ $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

__Beweis__: $[0,1]$ ist nicht abzählbar.

Widerspruchsbeweis: sei

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$$

eine Bijektion. Wir bilden induktiv eine monoton fallende Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdot \supseteq I_n \supseteq \cdots$ abgeschlossener Intervalle in $[0,1]$ mit $a(n) \notin I_n \quad \forall n \geq 0$.

Dann folgt: $a(n) \notin \bigcap_{\ell \geq 0} I_\ell \quad \forall n \geq 0$

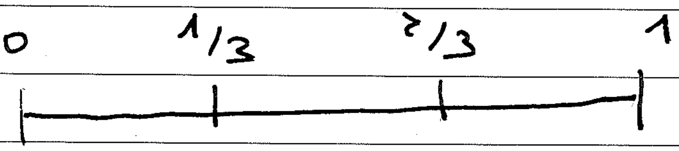
Andererseits gilt nach Cauchy-Cantor

$$\bigcap_{\ell \geq 0} I_\ell \neq \emptyset$$

woraus folgt, dass $a: \mathbb{N} \to [0,1]$ nicht surjektiv sein kann.

Konstruktion von I_n:

Sei $a(0) \in [0,1]$.



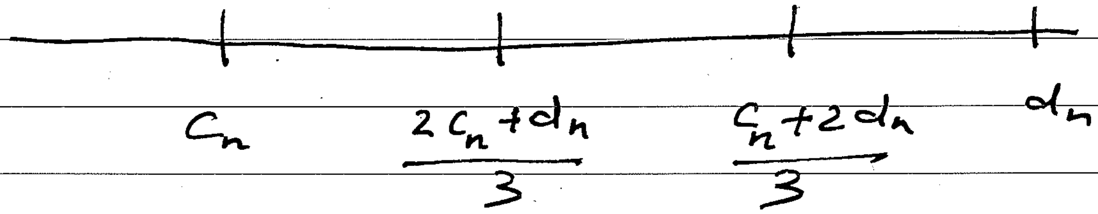
Dann nehmen wir als I_0 eines der Intervalle

$$[0, 1/3], \quad [1/3, 2/3], \quad [2/3, 1]$$

das $a(0)$ nicht enthält.

Sei nun I_n mit $a(n) \notin I_n$ induktiv definiert.

$I_n = [c_n, d_n]$.



Sei dann I_{n+1} dasjenige dieser drei Intervalle das $a(n+1)$ nicht enthält. Dann folgt:

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \text{und} \quad a(n+1) \notin I_{n+1}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Für den Satz von Bolzano – Weierstrass benötigen wir den Begriff der Teilfolge einer Folge.

<u>Def. II.24</u> Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei $b_n = a_{\ell(n)}$

wobei $\ell : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ eine Abbildung bezeichnet mit der Eigenschaft

$$\ell(n) < \ell(n+1) \quad \forall n \geq 1.$$

<u>Beispiel</u>: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Sei

$$\ell(n) = 2n$$

dann ist $b_n = 1 + \frac{1}{2n}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

<u>Theorem II.25</u> (Bolzano – Weierstrass)
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

<u>Beweis:</u> Sei $I = [a, b]$ beschränkt mit $\{a_n : n \geq 1\} \subset I$.

Wir definieren induktiv

$$I_1 = I \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq$$

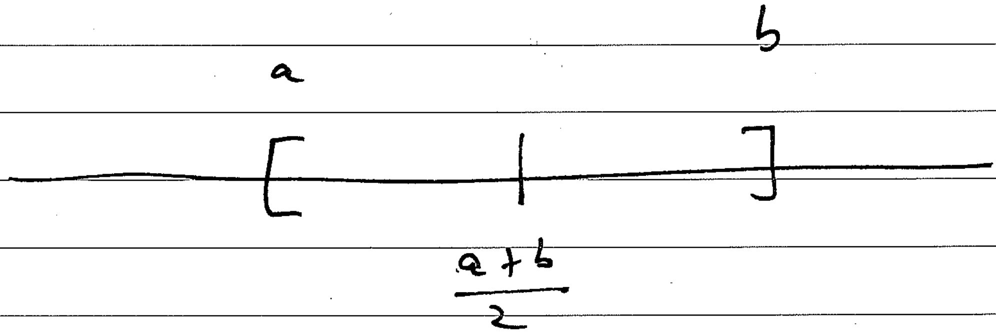
eine monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle mit:

(1) $\mathcal{L}(I_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(I_n)$

(2) $E_n = \{ j \in \mathbb{N}^* : a_j \in I_n \}$ ist unendlich.

Schritt 1: $I_1 = I \qquad E_1 = \mathbb{N}^*$

Schritt 2: $I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.



Sei dann I_2 eins dieser zwei Intervalle für welches

$$E_2 := \{ j \in \mathbb{N}^* , \; a_j \in I_2 \}$$

unendlich ist.

Dann ist $I_2 \subseteq I_1$ und $\mathcal{L}(I_2) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(I_1)$.

Dasselbe Argument liefert den Induktionsschritt von n auf $n+1$.

Konstruktion der Teilfolge:

$\ell(1) = 1$, $a_1 \in I = I_1$.

Da

$$E_2 = \{ n \in \mathbb{N}^* : a_n \in I_2 \}$$

unendlich ist gibt es

$$\ell(2) \in E_2 \quad \text{mit } \ell(2) > \ell(1).$$

Es gilt also $a_{\ell(2)} \in I_2$.

Dasselbe Argument liefert den Schritt von n auf $n+1$.

Wir ~~...~~ erhalten eine Abbildung

$$\ell : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

mit : $\ell(n+1) > \ell(n) \quad \forall n \geq 1$

und : $a_{\ell(n)} \in I_n$.

Nach Cauchy-Kantor sei

$$\{c\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n .$$

Da $a_{l(n)}$ und c in I_n enthalten sind folgt

$$|a_{l(n)} - c| \leq l(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a).$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} a_{l(n)} = c$$

$\boxed{\xi}$

Es gibt einen Interessanten Zusammenhang zwischen BW und limsup und liminf, nämlich

<u>Bemerkung II.26</u> Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Zudem gibt es zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$ die respective $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ als Grenzwert annehmen.