Es gibt einen Interessanten Zusammenhang zwischen BW und limsup und liminf, nämlich

<u>Bemerkung II.26</u> Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Zudem gibt es zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$ die respective $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ als Grenzwert annehmen.

II.5 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Der Begriff einer Folge in $\mathbb{R}^d$ (und $\mathbb{C}$) definiert sich wie im Falle von $\mathbb{R}$:

Def. II.27: Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^d .$$

Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$.

Sei $\| \ \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Def. II.28: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst konvergent falls es $a \in \mathbb{R}^d$

gibt so dass:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ mit

$$\| a_n - a \| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Falls solch ein a existiert ist es eindeutig bestimmt und nennt sich Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$.

Man schreibt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Sei $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})$ die Koordinaten von a_n.

<u>Satz II.29</u>: Sei $a = (a_1, \dots, a_d)$. Sind equivalent

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n,j} = a_j \quad 1 \leq j \leq d.$

Zunächst eine Bemerkung:

$$x = (x_1, \dots, x_d)$$

Dann ist $\forall\ 1 \leq j \leq d$:

$$x_j^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}_{\|x\|^2} \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$$

Woraus

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \text{ folgt.}$$

Beweis:

§.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $\varepsilon > 0$ und $N \geq 1$ mit

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Dann folgt für jedes $1 \leq j \leq d$:

$$|a_{n,j} - a_j| < \varepsilon$$

und somit $\lim_{n \to \infty} a_{n,j} = a_j$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei $\varepsilon > 0$ und für jedes $1 \leq j \leq d$, $N(j)$ so dass

$$|a_{n,j} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \quad \forall n \geq N(j).$$

Dann ist für $N := \max(N(1), .., N(d))$:

$$\max_j |a_{n,j} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \quad \forall n \geq N$$

und somit

$$\|a_n - a\| \leq \sqrt{d} \max_j |a_{n,j} - a_j| < \varepsilon.$$

$\boxed{\geq}$

<u>Bemerkung</u>. Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt. D.h.:

$$\exists R \geq 0 \text{ mit } \|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1.$$

Aus Satz II.29 folgt

Satz II.30

(1) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann wenn es eine Cauchy Folge ist:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$ mit

$$\| a_n - a_m \| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$$

(2) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

II. 6. Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Der Begriff der Konvergenz der Reihe „$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$"

stützt sich auf die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

<u>Definition II. 31</u> Die Reihe „$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$" ist konvergent falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$.

<u>Notation:</u> Von nun an bezeichnen wir den Absolutbetrag einer komplexen Zahl

$$z = x + iy$$

mit $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$

<u>Beispiel II.32</u>: (geometrische Reihe)

Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und dessen Wert ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,.$$

Sei $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \dots + q^n$

$$q \cdot S_n = \quad = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

woraus $(1-q)\,S_n = 1 - q^{n+1}$ folgt.

Also $\quad S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$\left| S_n - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$$

Aus Beispiel II.13 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_n - \frac{1}{1-q} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0.$$

Beispiel II.33 Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert}.$$

(Beispiel I.15 ii).

~~Aus dem Satz von Cauchy (II.18~~ / II.30)
~~für Folgen folgt:~~

Analog zu Satz 2.8 für Folgen erhalten wir

Satz II.34 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

<u>Beweis</u>: für die erste Aussage. Seien

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k , \quad u_n := \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{und}$$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) . \text{ Dann ist}$$

$$w_n = s_n + u_n$$

Woraus, nach Satz 2.8

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \lim_{n \to \infty} s_n + \lim_{n \to \infty} u_n$$

Was die erste Aussage beweist.

Der Beweis für die zweite verläuft analog. $\square$

Produkte von konvergierenden Reihen sind etwas schwieriger zu handhaben; wir werden Produkte im Fall von absolut konvergenten Reihen behandeln.

Das Cauchy Kriterium für Konvergenz von Folgen liefert ein sehr nützliches Kriterium für Konvergenz von Reihen.

<u>Satz II.35</u>: (Cauchy-Kriterium).

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent falls

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ mit

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall\, m \geq n \geq N.$$

<u>Beweis</u>: Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Dann folgt für $m \geq n$:

$$S_m - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= \sum_{k=n}^{m} a_k.$$

Der Satz folgt dann aus dem Cauchy Kriterium für Folgen. $\boxed{\xi}$

Reihen mit nicht negativen Gliedern sind speziell einfach zu behandeln; auch spielen sie in der Theorie absolut konvergenter Reihen eine wichtige Rolle, deshalb behandeln wir sie zuerst. Folgender Satz ist eine einfache Anwendung des Satzes von Weierstrass:

<u>Satz I.36</u>. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geqslant 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann falls die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,

der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

<u>Beweis:</u> $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$= a_{n+1} \geq 0.$$

Also ist $(S_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend.

Falls $(S_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist folgt aus Weierstrass, dass die Folge konvergiert. Falls sie nicht nach oben beschränkt ist kann sie nicht konvergieren.

$\boxed{\xi}$

Wir erhalten folgendes sehr nützliche Korollar:

Korollar II. 37. (Vergleichssatz).

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen

mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1.$$

Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent.}$$

Die Implikationen treffen auch zu wenn

es $K \geq 1$ gibt so dass

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K.$$

<u>Beispiel II. 38</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Sei $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{(k-1)k}$ $k \geq 2$.

Dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ $k \geq 2$.

Und

$$\sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \geq 1.$$

<u>Definition II. 39</u> Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

heisst absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{konvergiert.}$$

Eine Anwendung des Cauchy Kriterium liefert:

<u>Satz II 40</u> Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent und es gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

<u>Beweis:</u> Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert gibt es nach Cauchy $\forall \varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ mit:

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N.$$

Daraus folgt:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

Woraus (Satz II.35) die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$ folgt.