Seien jetzt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Dann gilt

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = u_n$$

und folglich

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} s_n\right| = \lim_{n\to\infty} |s_n|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

$\boxed{\xi}$

<u>Beispiel II.40</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} =$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent.

Das die Reihe im Beispiel II.40 konvergiert ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes:

Satz II.41 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$, und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

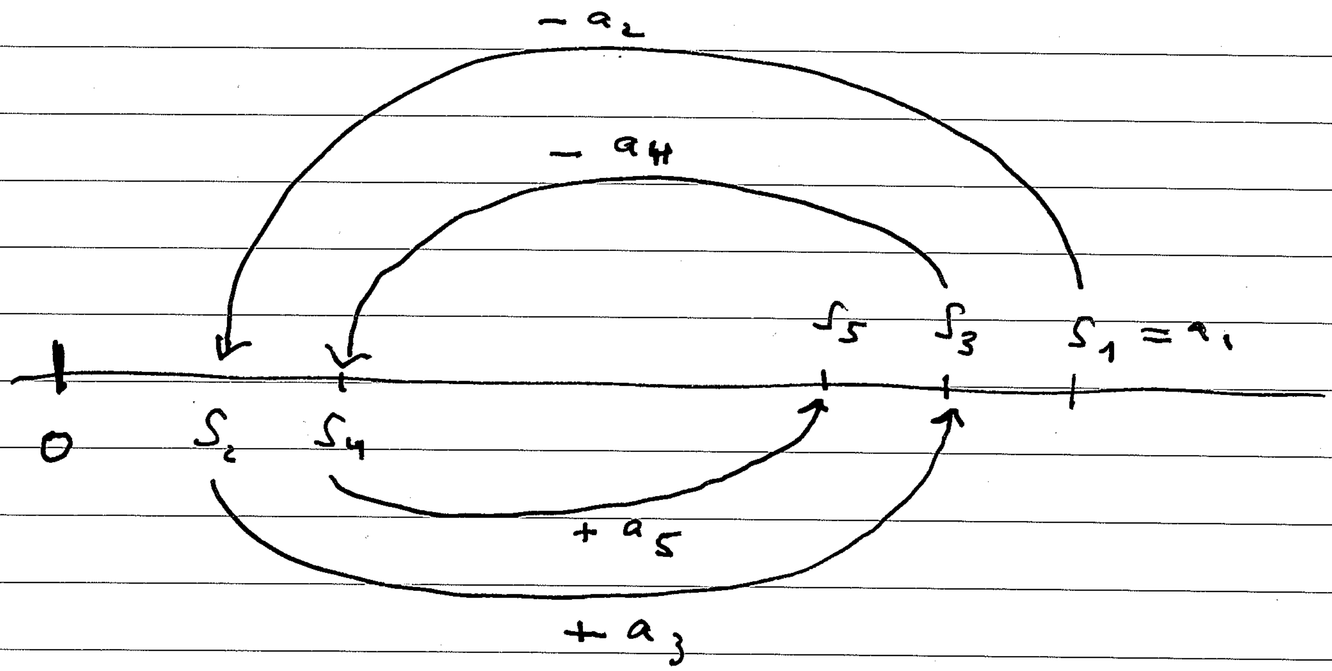
$$s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$$

Beweis: Sei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$.

Die Idee des Beweises lässt sich bildlich wie folgt darstellen:



Sei also

$$S_{2n+1} = \underbrace{a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1}}_{S_{2n-1}} - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$= S_{2n-1} - \left(a_{2n} - a_{2n+1}\right) \leq S_{2n-1}.$$

$$S_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n-2}}_{S_{2n-2}} + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= S_{2n-2} + \left(a_{2n-1} - a_{2n}\right) \geq S_{2n-2}$$

Die Folge $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ ist monoton fallend und $(S_{2n})_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend.

Aus $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$ $\quad (*)$

folgt $S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1$

Beide monotone Folgen sind beschränkt also existieren

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}.$$

Aus $(*)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}.$$

Daraus folgt, dass $(S_m)_{m\geq 1}$ konvergiert mit gleichem Grenzwert. $\boxtimes$

Beispiel II. 42 Betrachten wir nochmals das Beispiel II 40:

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq s \leq 1.$$

Wir ändern jetzt die Reihenfolge der Summanden wie folgt:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{1/2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}_{1/6} - \frac{1}{8} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}_{1/10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

und erhalten

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cancel{-\frac{1}{10}} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \cancel{\pm} \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

Die ~~neue~~ umgeordnete Reihe konvergiert also mit Grenzwert $\frac{1}{2} s$!!!

Riemann (1854) hat sogar gezeigt, dass es für jede reelle Zahl $A \in \mathbb{R}$ eine Umordnung obiger Reihe gibt, die gegen A konvergiert! (Übung).

<u>Def II.43</u>. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ falls es eine Bijektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

gibt so dass

$$a'_n = a_{\varphi(n)}.$$

<u>Bemerkung II.44</u>: Aus Riemann folgt, dass es Überabzählbar viele Bijektionen von $\mathbb{N}^*$ gibt.

Satz II. 45 (Dirichlet 1837)

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert,

dann konvergiert jede Umordnung

und hat selben Grenzwert.

Beweis:

Wir wenden das Cauchy Kriterium

auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ an:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1$ sodass $\forall n \geq N$ und

$k \geq 1$:

$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon$.

Sei $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Bijektion.

und

$$s'_m = \sum_{i=1}^{m} a_{\varphi(i)}$$

die m-te Partialsumme der umgeordneten Reihe.

Wir wählen jetzt $M \geq N$ so dass:

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(M)\}.$$

Dann folgt $\forall m \geq M$:

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(m)\}$$

und

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Für $k \geq 1$ so dass $\quad m \leq N + k$

$$\varphi(m) \leq N + k$$

folgt:

$$|S'_m - S_m| \leq |a_{N+1}| + \dots + |a_{N+k}| < \varepsilon .$$

Folglich gilt $\lim\limits_{m\to\infty}(S'_m - S_m) = 0$

und somit

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{m\to\infty} S_m + \lim_{m\to\infty}(S'_m - S_m)$$

$$= \lim_{m\to\infty} S_m . \qquad \boxed{\xi}$$

<u>Übung</u>: Wo haben wir absolute Konvergenz benützt?

Wir werden jetzt hinreichende Bedingungen für absolute Konvergenz herleiten:

Es handelt sich dabei um das Quotienten-kriterium und das Wurzelkriterium. Beide benützen den Vergleichsatz (Korollar II.37) und die Konvergenzbedingung für die geometrische Reihe.

Satz II.46 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$.

Falls
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$
dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Falls
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$
divergiert die Reihe.

Beweis: Sei

$$c_n = \sup \left\{ \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} : k \geq n \right\}.$$

Die Annahme ist, dass

$$\left\{ \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} : k \geq 1 \right\}$$

beschränkt ist. Dann ist $(c_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} c_n .$$

Sei $0 < q < 1$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} c_n < q < 1 .$$

Sei $N \geq 1$ so dass

$$c_N \leq q < 1 .$$

Dann folgt $\forall k \geq N$, dass

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$$

woraus $|a_{k+1}| \leq q\,|a_k|$ folgt,

und somit für $j \geq 1$:

$$|a_{N+j}| \leq q\,|a_{N+j-1}| \leq \ldots \leq \underbrace{q^j\,|a_N|}_{q^{N+j}\frac{|a_N|}{q^N}}.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\forall n \geq N+1$

$$|a_n| \leq q^n \frac{|a_N|}{q^N}.$$

Die Aussage folgt dann vom Vergleichsatz.

Ein Analoges Argument zeigt, dass wenn

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} > 1$$

die Folge $(|a_m|)_{m\geq 1}$ unbeschränkt ist. Also können weder

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m$$

noch $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$ konvergieren.

$\boxed{\xi}$

<u>Beispiel II. 47</u> (Die Exponentialfunktion).

Für $z \in \mathbb{C}$, betrachte die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

mit algemeinen Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}.$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n}\right|$$

$$= \frac{|z|}{n+1}$$

Also $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ und

die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir definieren die Exponentialfunktion:

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$