

Das Quotientenkriterium versagt wenn

z. B. unendlich viele der a_n 's verschwinden.

Satz I. 48 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821)

(1) Falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(2) Falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Beweis:

(1) Sei $c_n := \sup \{ \sqrt[k]{|a_k|} : k \geq n \}$

und $0 < q < 1$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} < q < 1.$$

~ II - 75 ~

Dann gibt es $N \geq 1$ mit

$$C_N = \sup \{ \sqrt[k]{|a_k|} : k \geq N \} \leq q,$$

$$\text{Woraus } |a_n| \leq q^k \quad \forall k \geq N$$

folgt. Die Aussage folgt dann
aus dem Vergleichssatz.

(2) Ein analoges Argument zeigt
dass $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele
 n 's. □

Eine wichtige Klasse von Funktionen
in der Analysis werden durch "kon-
vergente Potenzreihen" definiert.

Sei $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ konvergent

definieren wir

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Korollar II. 49

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

konvergiert für alle $|z| < \rho$

und divergiert für alle $|z| > \rho$.

Beweis: Sei $a_n := c_n z^n$. Dann

$$\text{ist } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|} |z|$$

— II ~ 77 bis —.

Die Zeta Funktion:

Sei $s > 1$, und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Wir wissen j. B., dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

konvergiert.

— Quotientenkr.: $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1.$

— Wurzelkr.: $\sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \rightarrow 1.$

Weiter QK noch WK erlauben auf die Konvergenz von (*) zu schließen.

Behauptung: für $s > 1$ konvergiert die obige Reihe.

- IV - fort -

$$\text{Sei } S_N = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{N^s}.$$

Sei $k \geq 1$ mit $N \leq 2^k$, dann ist

$$S_N \leq S_{2^k}.$$

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^s} + \underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{\leq \frac{2}{2^s}} + \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{\leq \frac{4}{4^s}} + \underbrace{\dots}_{\leq \frac{8}{8^s}} + \dots$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + \dots$$

Da $s-1 > 0$ folgt $2^{s-1} > 1$ und

$$\frac{1}{2^{s-1}} < 1.$$

Die Konvergenz folgt aus der geom.
Reihe.

- II - 77 -

$$\text{Also } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot 131$$

und die Aussage folgt aus dem
Wurzelkriterium. $\square$

Doppelte Summation:

Betrachten wir:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{00} + a_{01} + a_{02} + \dots & & = s_0 \\
 + & + & + \\
 a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots & & = s_1 \\
 + & + & + \\
 a_{20} + a_{21} + a_{22} + \dots & & = s_2 \\
 + & + & + \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & = \\
 = & = & = \\
 b_0 + b_1 + b_2 & & = ???
 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & = & 0 \\ + & & + & & + & & + & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & - & 1 & + & 0 & + & \dots & = & 0 \\ + & & + & & & & + & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 0 & + & 1 & - & 1 & + & \dots & = & 0 \\ & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$= \quad = \quad = \quad = \quad = \quad 0$$

$$1 + 0 + 0 + \dots = 1 \quad \boxed{1 \neq 0}.$$

Gegeben eine Doppelreihe $(a_{ij})_{i,j \geq 0}$

können
$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = s_0 + s_1 + s_2 + \dots$$

und
$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

beide konvergent sein mit verschiedenen Grenzwert.

Wir nennen $\sum_{i,j \geq 0} a_{i,j}$ eine Doppelreihe.

Def. II.50 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare

Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j} a_{i,j}$

falls es eine Bijektion

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.

Theorem II.51. (Cauchy 1821) Wir nehmen

an, dass es $B \geq 0$ gibt so dass

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{i,j}| \leq B \quad \forall m \geq 0.$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$s_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \quad \forall i \geq 0$$

$$v_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

So wie: $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$

Und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i = \sum_{j=0}^{\infty} v_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut mit selben Grenzwert.

Beweis:

Sei $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ eine lineare Anordnung der obigen Doppelreihe.

Für jedes $n \geq 0$ gibt es $m \geq 0$

$$-II-81$$

so dass:

$$\{b_0, \dots, b_n\} \subset \{a_{ij} : 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq m\}$$

Woraus

$$\sum_{i=0}^n |b_i| \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B$$

folgt.

Daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

absolut konvergiert.

Dasselbe Argument liefert auch, dass die Reihen

$$s_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$$

$$\text{und } v_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

absolut konvergieren.

Wir wenden jetzt das Cauchy Kriterium
an auf die absolut konvergente Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i :$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall k \geq 1:$$

$$|b_{n+1}| + \dots + |b_{n+k}| < \varepsilon.$$

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ und
entsprechenden $N \geq 0$ wählen

Wir ein $M \geq 0$ so dass alle

$$b_1, \dots, b_N$$

im "Quadranten"

$$a_{ij}, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq j \leq M$$

vorkommen.

- II - 83 -

M

a_{00}	a_{01}	a_{02}			
	b_2		b_0		
				b_{N-1}	
	b_{10}				
			b_N		

M →

$$\sigma(2) = (1, 2)$$

$$\sigma(0) = (1, 4)$$

$$\sigma(N) = (M, 4)$$

Mit dieser Wahl sind die Terme

$$b_0, \dots, b_N$$

präsent in der Summe

$$\sum_{i=0}^l b_i$$

für $l \geq N$

Sowie in

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}$$

für $m \geq M$
 $n \geq M$.

Es folgt

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - \sum_{i=0}^l b_i \right|$$

$$\leq |b_{n+1}| + \dots + |b_{n+k}| < \varepsilon$$

für ein genügend großes $k \geq 1$.

Daraus folgt mit $s := \sum_{i=0}^{\infty} b_i$

$$\left| \sum_{i=0}^m s_i - s \right| < \varepsilon$$

sowie

$$\left| \sum_{j=0}^n v_j - s \right| < \varepsilon$$

Woraus

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i = s = \sum_{j=0}^{\infty} v_j$$

folgt.



Wir können jetzt das Cauchy
Produkt zweier Reihen behandeln.

Falls wir das Produkt von
 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ berechnen,

müssen wir eine Art finden

die Einträge der Matrix

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots & & \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & & \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & & \\ a_3 b_0 & a_3 b_1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \end{array}$$

zu summieren.

Def II.52 : Der Cauchy Produkt der
Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Übung II.53 : Zeige dass der Cauchy
produkt mit sich selbst der Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

divergiert.

~ 11 - 84 - 6.5 -

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\left| \sum_{j=0}^n a_{n-j} a_j \right| = \left| \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j} (-1)^j}{\sqrt{n-j+1} \sqrt{j+1}} \right|$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}}$$

$$\text{Da } (n+1-j)(j+1) \leq (n+1)^2$$

$$\text{folgt } \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}} \geq \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

Satz II.54: Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j \quad \text{absolut}$$

konvergieren so konvergiert ihr Cauchy

Produkt und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Beweis: Direkte Anwendung von Satz II.51.

□

Anwendung II.55 $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$\exp(w+z) = \exp w \exp z.$$

Wir berechnen das Cauchy produkt
der Reihen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}.$$

Dies ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!} \right)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!} &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^{n-j} z^j \\ &= \frac{(w+z)^n}{n!} \end{aligned}$$

Woraus die Behauptung folgt.

Zum Abschluss behandeln wir noch
das Problem ob man Summation und
Limes vertauschen kann.

In diesem Zusammenhang wird es nützlich
sein eine Folge in $\mathbb{R}$ als eine Funktion

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

aufzufassen.

Theorem II.56 Sei $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine
Folge. Wir nehmen an, dass:

$$(1) f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) \text{ existiert } \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$(2) \text{ es gibt eine Funktion } g: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$$

$$\text{so dass } (2.1) |f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0.$$

$$(2.2) \sum_{j=0}^{\infty} g(j) \text{ konvergiert.}$$

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n f_n(j) .$$

Korollar II.57: Für jedes $z \in \mathbb{C}$

konvergiert die Folge $\left(\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \exp(z) .$$

Beweis:

$$\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{z}{n} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{1}{n^k} z^k$$

- II - 83 -

$$= \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)! n^n}$$

Nun ist:

$$\frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}$$

$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Sei also:

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{3^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)! n^k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k \geq n+1. \end{cases}$$

Für jedes $k \geq 0$ gilt offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = \frac{3^k}{k!} = f(k).$$

Zudem: $|f_n(k)| \leq \frac{|3|^k}{k!} = g(k)$

$$\sim \overline{II} - g_0 \sim$$

Und wir hatten schon gezeigt, dass

$$\sum_1 g(k) = \sum_1 \frac{|z|^k}{k!}$$

konvergiert.