

Anhang 1: Der Binomialsatz

Sei für jede ~~n~~ natürliche
Zahl $n \geq 1$,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Man erweitert die Definition auf $n=0$
mit der Konvention,

$$0! = 1.$$

Bekanntlich ist $n!$ die Kardinalität
der Menge der Bijektionen

$$\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

Solche Bijektionen werden auch
Permutationen genannt.

Sei jetzt $1 \leq k \leq n$, wir berechnen
jetzt die Kardinalität der Menge

$$P_k(n) := \{ A \subset \{1, \dots, n\} : \text{Card } A = k \}.$$

Sei

$$I_{n,k}(n) = \{ \sigma: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} : \\ \sigma \text{ injektiv} \}.$$

Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \text{Card}(I_{n,k}(n)) &= n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$I_{n,k}(n) \rightarrow P_k(n)$$

$$\sigma \mapsto \sigma(\{1, 2, \dots, k\})$$

die per Definition surjektiv ist.

Jetzt bemerken wir noch, dass falls $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ eine Teilmenge der Kardinalität k bezeichnet, dann gibt es $k!$ Bijektionen

$$\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A.$$

Folglich erhalten wir:

$$\text{Card } P_n(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Letzterer Ausdruck wird mit $\binom{n}{k}$

bezeichnet. Wir erweitern zudem die Definition von $\binom{n}{k}$ auf

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

- II - 5 -

Binomial Satz: $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$

gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis: Aus dem Distributivgesetz folgt:

$\underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ Mal}}$

$$= \sum_{A \subset \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\})} x^{\text{Card } A} y^{n - \text{Card } A}$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \sum_{\text{Card } A = k} 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Card } \mathcal{P}_k(n)}$

$$\binom{n}{k}$$



III. Stetige Funktionen.

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der ~~stetigen~~ stetigen Funktion ein und beweisen einige grundlegenden Sätze wie der Zwischenwertsatz, das Max-Min Theorem und den Satz über die Umkehrabbildung. Der Begriff der stetigen Funktion wurde von Cauchy in seinem "Cours d'Analyse" 1821 eingeführt; die moderne ε - δ -Definition geht auf Weierstrass 1874 zurück.

IV. 1. Reelwertige Funktionen.

Sei D eine beliebige Menge. Die Menge $\mathcal{R}^D$ aller Funktionen

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ wobei Addition und skalare Multiplikation gegeben sind durch:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

wobei f_1, f_2, f in $\mathcal{R}^D$, $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Auf $\mathcal{R}^D$ gibt es auch ein Produkt.

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$$

Eine konstante Funktion ist eine die immer den selben Wert annimmt; darunter gibt es die Funktionen $0, 1 \in \mathbb{R}^D$:

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in D$$

$$1(x) = 1 \quad \forall x \in D.$$

Offensichtlich gilt $f + 0 = f$, $g \cdot 1 = g$

$\forall f, g \in \mathbb{R}^D$; $\mathbb{R}^D$ versehen mit $+$, $\cdot$

erfüllt alle Körperaxiome ausser:

Falls $\text{Card } D \geq 2$ gibt es immer ein $f \neq 0$, das kein Inverses besitzt.

Auf $\mathbb{R}^D$ definieren wir eine Ordnung

$$f \leq g \quad \text{falls} \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$$

und sagen f ist nicht negativ falls

$$0 \leq f.$$

Wir führen rasch einige Begriffe für $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen ein die sich an den analogen Begriffen für Folgen anlehnen.

Def. IV.1 Sei $f \in \mathbb{R}^D$.

- (1) f ist nach oben beschränkt falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.
- (2) f ist nach unten beschränkt falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist.
- (3) f ist beschränkt falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Falls $D \subseteq \mathbb{R}$ gibt es folgende Monotoniebegriffe:

Def. III.2 Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

ist

(1) monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D$:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(2) streng monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D$:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(3) monoton fallend, falls $\forall x, y \in D$:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

(4) streng monoton fallend, falls $\forall x, y \in D$:

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

(5) monoton falls f monoton wachsend oder fallend

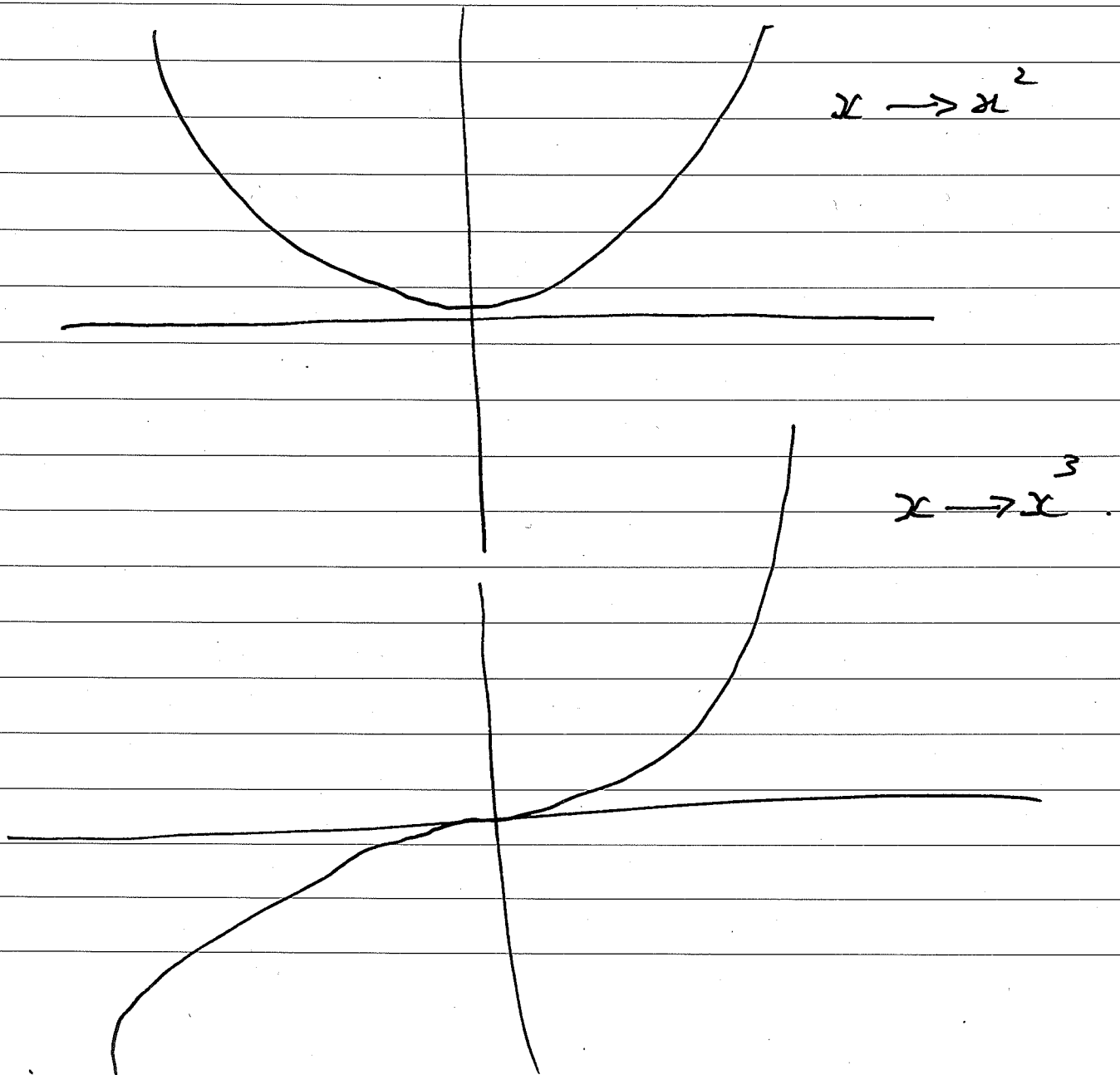
(6) streng monoton falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beispiele III. 3

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$

ist genau dann (streng) monoton

wachsend falls n ungerade ist:



III. 2. Stetigkeit.

Def. III. 4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0

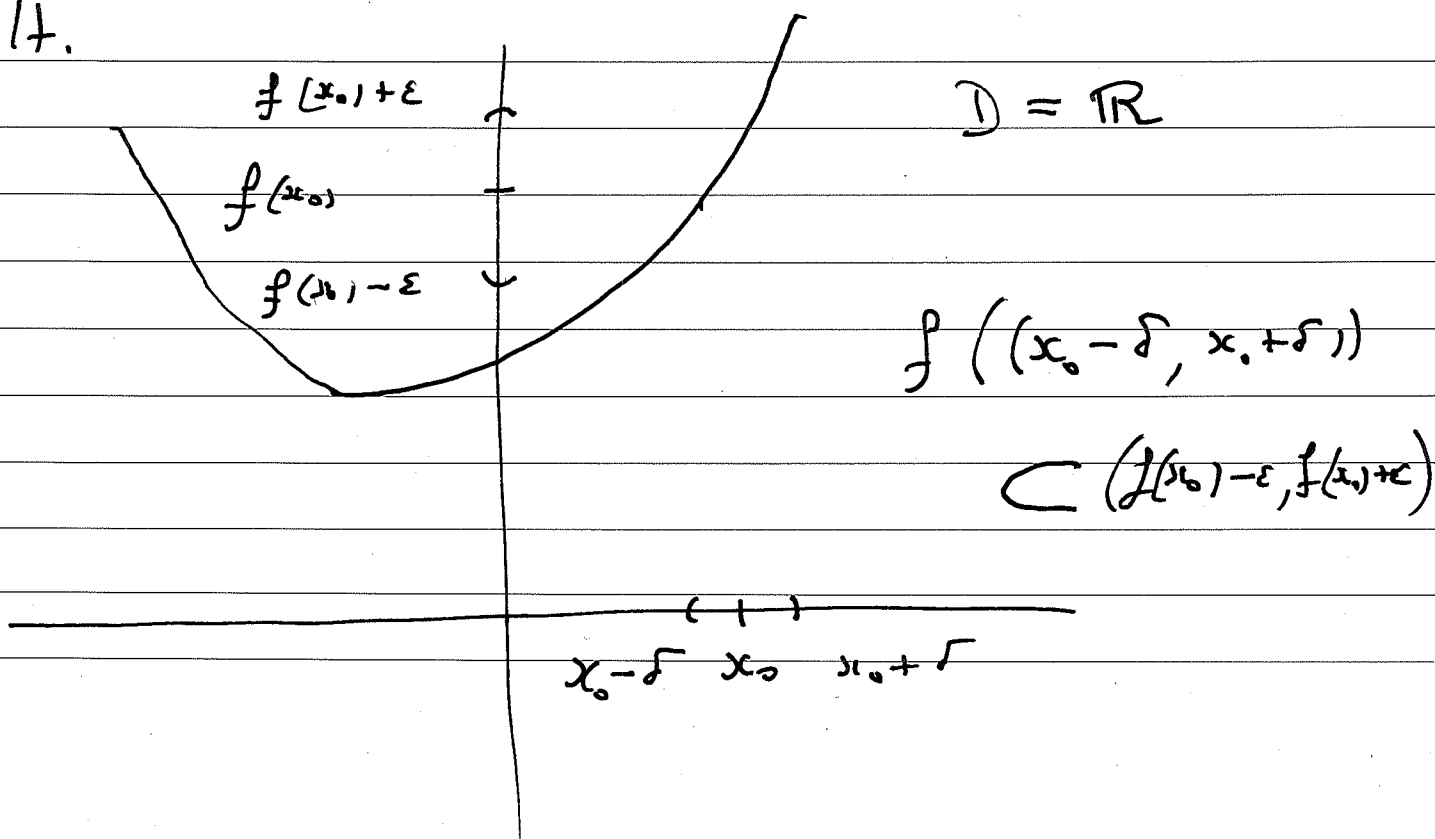
stetig falls es für ^{jedes} ~~alle~~ $\varepsilon > 0$

ein $\delta > 0$ gibt so dass für alle

$x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

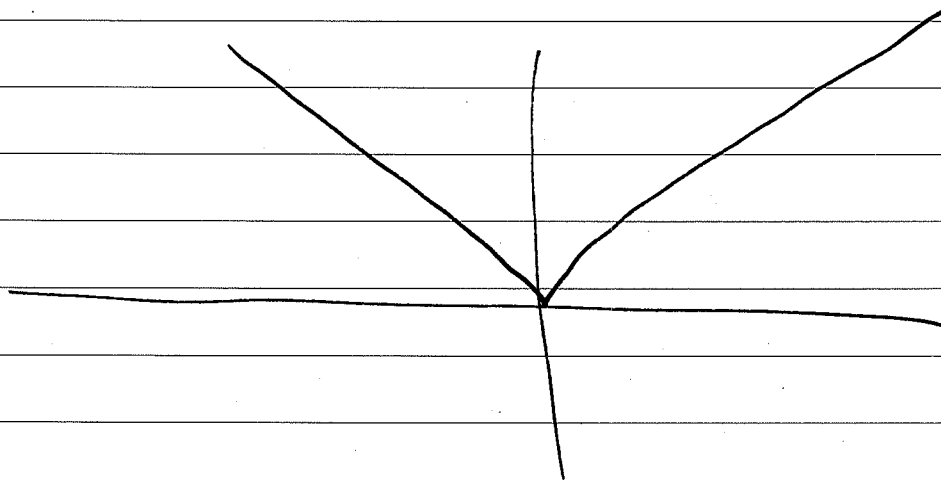


Def. III.5 Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele III.6

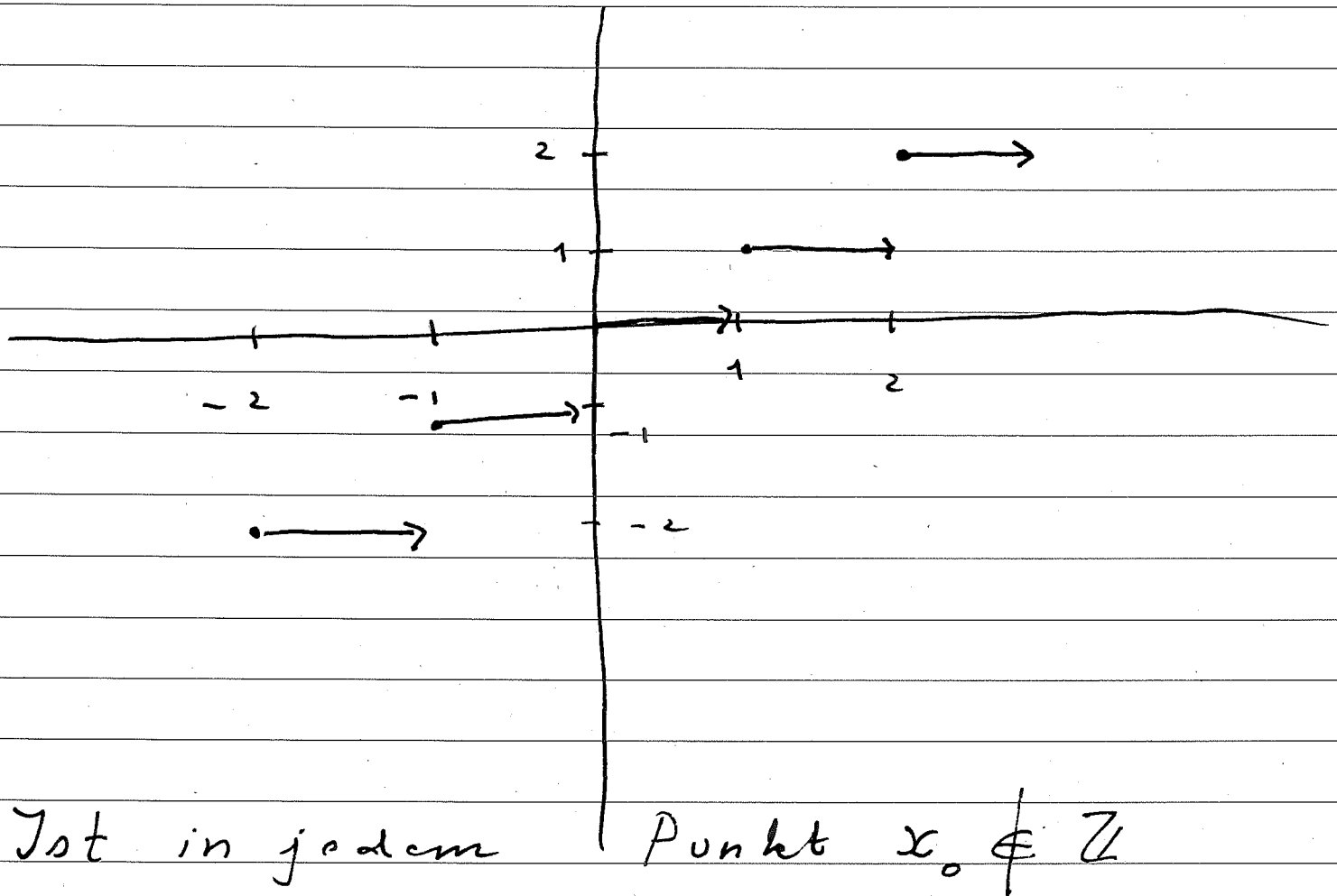
(1) Sei $n \geq 0$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ ist stetig.

(2) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig.



(3) Die Abrundungsfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto [x] := \max \{ m \in \mathbb{Z} : m \leq x \}$$



Ist in jedem Punkt $x_0 \notin \mathbb{Z}$
stetig; sie ist in keinem Punkt
 $y_0 \in \mathbb{Z}$ stetig.

Falls $D := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, dann ist

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto [x] \quad \text{stetig} \end{aligned}$$

(4) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert

durch:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist genau in $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ stetig und
in keinem anderen Punkt.

Es gibt eine sehr nützliche Charakterisierung von Stetigkeit mittels konvergenter Folgen.

Satz III.7 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

f ist genau dann in x_0 stetig falls
für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende

Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Beweis:

($\Rightarrow$): Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in D

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$ und

$\delta > 0$ so dass für alle $x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sei nun $N \geq 1$ so dass

$$|a_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq N.$$

Dann folgt

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

und daher: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$.

($\Leftarrow$): Annahme: f ist in x_0 nicht

stetig. Es gibt also $\varepsilon > 0$ so dass

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D) \not\subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$\forall \delta > 0$.

Insbesondere gibt es für jedes $n \geq 1$
 $n \in \mathbb{N}$ (mit $\delta = \frac{1}{n}$) ein

$$a_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap D$$

mit $f(a_n) \notin (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Damit entsteht eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in

D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$

und $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1$.

□

Aus dem entsprechenden Satz für
Folgen (Satz II.8) erhalten wir
mit Satz III.7:

Korollar III. 8 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 .

(1) Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ stetig in x_0 .

(2) Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0 .

Def. III. 9 Eine polynomiale Funktion $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Falls $a_n \neq 0$, ist n der Grad von P .

Korollar III. 10. Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Korollar III. 11 Seien P, Q Polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien

$x_1, \dots, x_m$ die Nullstellen von Q . Dann

$$\text{ist } \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

III. 3. Der Zwischenwertsatz

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: dann liegt c zwischen

x_1 und x_2 falls:

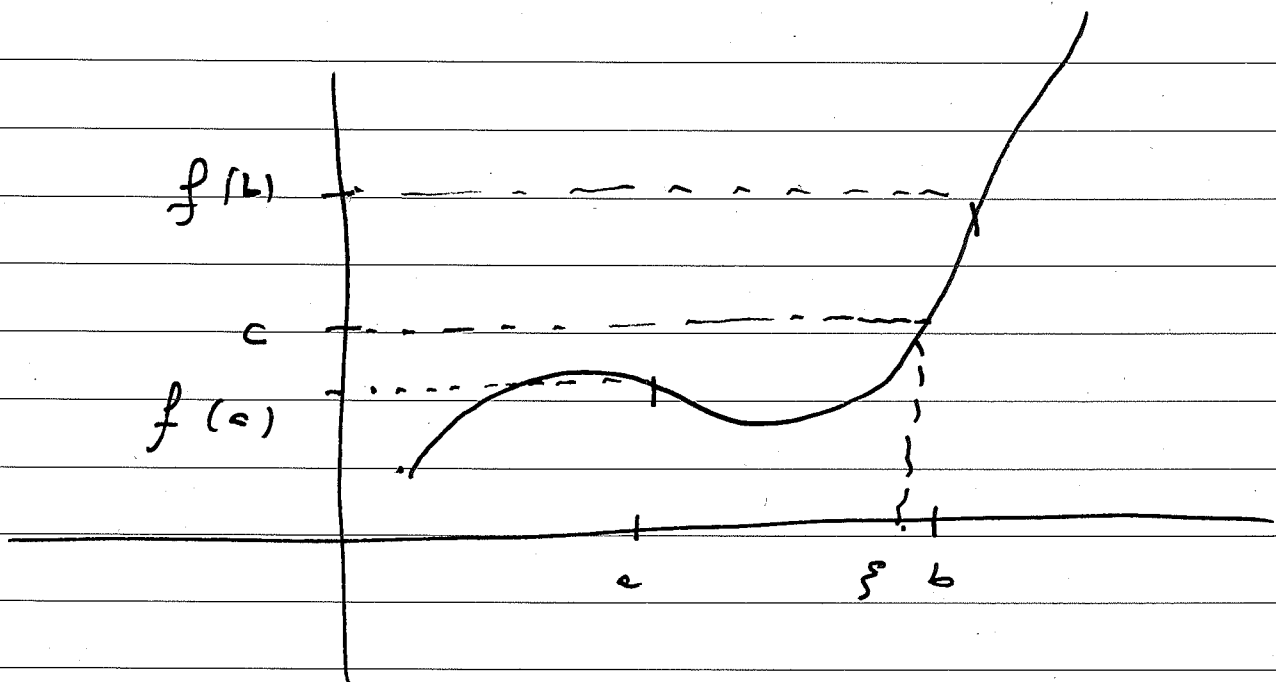
$$(1) \ x_1 \leq x_2, \ c \in [x_1, x_2]$$

$$(2) \ x_2 \leq x_1, \ c \in [x_2, x_1].$$

- III - 16 -
(Bolzono 1817)

Satz IV.12 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

~~habe~~ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion,
und a, b in I . Für jedes c zwischen
 $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein ξ zwischen
 a und b mit $f(\xi) = c$.



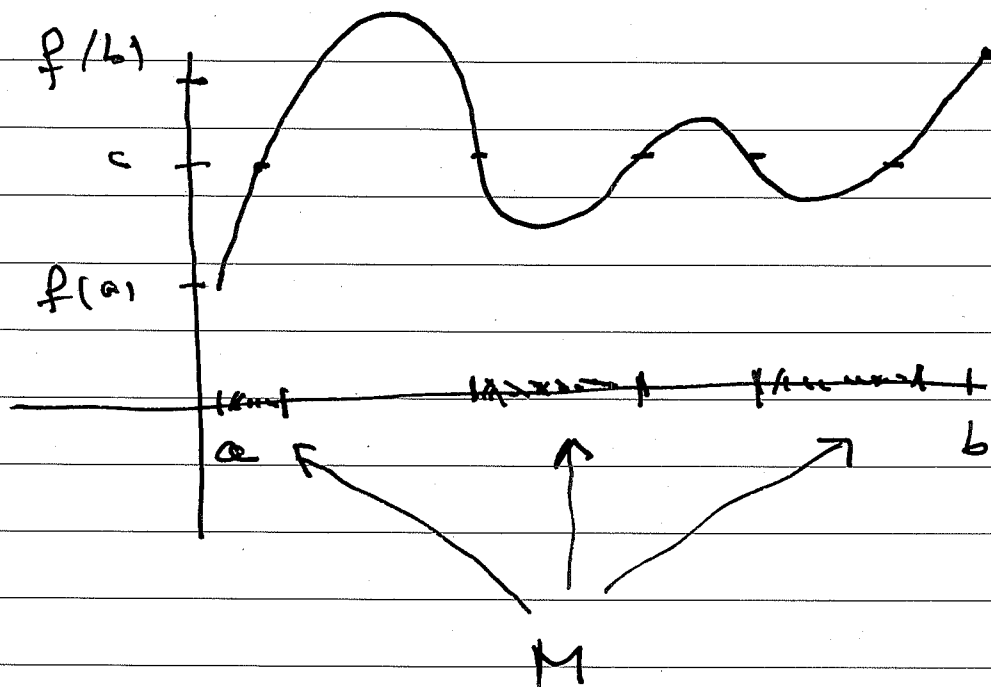
Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir

$a \leq b$ und $f(a) \leq f(b)$ annehmen.

Sei also $f(a) \leq c \leq f(b)$.

Wir definieren:

$$M = \{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}$$



Sei $\xi := \sup M$, wir zeigen

$$f(\xi) = c.$$

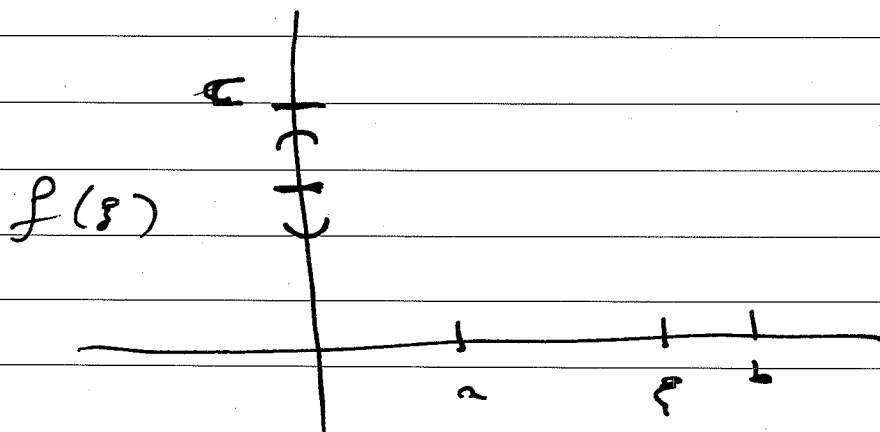
~ III - 18 -

Zunächst bemerken wir, dass $\sup M$ existiert: $M \ni a$, insbesondere $M \neq \emptyset$ und $M \subset [a, b]$, insbesondere ist M beschränkt.

Wir zeigen, dass $f(\xi) = c$ mittels einem Widerspruchsbeweis.

(1) $f(\xi) < c$: insbesondere gilt
 $\xi < b$

da sonst aus $\xi = b$, $f(\xi) = f(b) \geq c$ folgt, entgegen der Annahme $f(\xi) < c$.



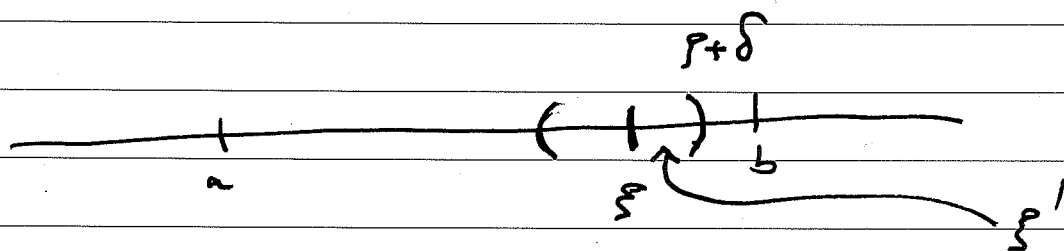
- III - 19 -

Sei nun $\varepsilon = \frac{c - f(\xi)}{2}$ und sei $\delta > 0$

entsprechend, so dass:

$$f((\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]) \subset (f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon).$$

Da $\xi < b$ folgt $(\xi, \xi + \delta) \cap [a, b] \neq \emptyset$.



Sei also $\xi' \in (\xi, \xi + \delta) \cap [a, b]$.

Dann folgt:

$$f(\xi') \in (f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon)$$

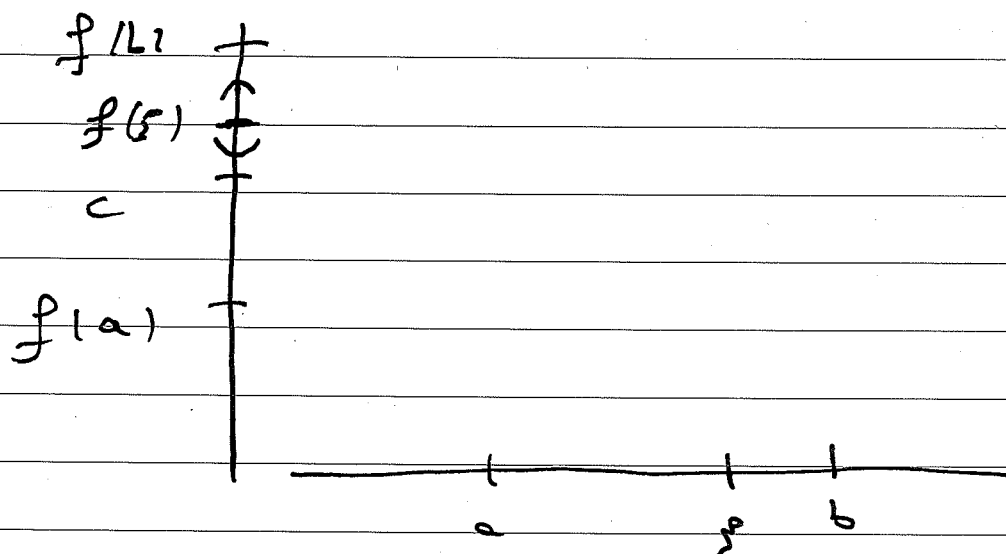
insbesondere

$$f(\xi') < f(\xi) + \varepsilon < f(c)$$

Zusammen mit $\xi' > \xi$ führt dies zu

einem Widerspruch mit der Definition von $\sup M$.

(2) $f(\xi) > c$:



Sei $\varepsilon = \frac{f(\xi) - c}{2}$ und δ so dass

$$f((\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]) \subset (f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon).$$

Da $\xi = \sup M$ folgt

$$(\xi - \delta, \xi] \cap M \neq \emptyset.$$

Sei also $x \in (\xi - \delta, \xi] \cap M$:

Es folgt dann $f(x) \leq c$ ($x \in M$)

und $f(x) \in (f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon)$

insbesondere $f(x) > f(\xi) - \varepsilon > c$. □

Korollar III. 13 Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade.

Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Bemerkung IV. 14: für $c > 0$ besitzt

$Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in

$\mathbb{R}$.

Beweis: O.E.B.A. können wir $a_n = 1$

annehmen. Für $x \neq 0$ betrachte:

$$\frac{P(x)}{x^n} = \underbrace{1 + a_{n-1} x^{-1} + a_{n-2} x^{-2} + \dots + a_0 x^{-n}}_{Q(x)}$$

Da $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m}\right)^j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$

$$\text{und } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{m}\right)^j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

gibt es $N \geq 1$ in $\mathbb{N}$ so dass:

$$\frac{1}{2} \leq Q(N) \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq Q(-N) \leq \frac{1}{2}$$

Daraus folgt

$$P(N) = N^n Q(N) > 0$$

$$P(-N) = (-N)^n Q(-N) < 0 \quad (n \text{ ungerade})$$

Der Zwischenwertsatz angewandt

$$\text{auf } P: [-N, N] \rightarrow \mathbb{R}$$

garantiert dann die Existenz von

$$\xi \in [-N, N] \text{ mit } P(\xi) = 0. \quad \square$$