

Lösungen Quiz 21

Version A

Sei

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cos z\}$$

und bezeichne $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Mit welchem/n der folgenden Integrale lässt sich das Volumen von K berechnen?

(a) $\int_B \arccos \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$

(b) $\int_B (\frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy.$

(c) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \arccos(r) r \, dr d\phi.$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx dy dz.$

Lösung: (a) und (c)

Wenn wir die Gleichung $\sqrt{x^2 + y^2} = \cos z$ nach z auflösen, sehen wir, dass eine der Grenzen für z gegeben ist durch $z = \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$. Wenn man sich den \cos vor Augen führt, sieht man zudem, dass die korrekten Grenzen für z in Abhängigkeit von x und y sind: $0 \leq z \leq \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$. Somit ist (a) korrekt und (b) falsch.

(c) ist das selbe wie (a), wenn wir Polarkoordinaten verwenden und somit auch korrekt, während (d) falsch ist, da es das Volumen eines einfachen Zylinders beschreibt.

Version B

Bitte wenden!

Sei

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sin z\}$$

und bezeichne $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Mit welchem/n der folgenden Integrale lässt sich das Volumen von K berechnen?

- (a) $\int_B \arcsin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$
- (b) $\int_B (\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy.$
- (c) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \arcsin(r) r \, dr d\phi.$
- (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx dy dz.$

Lösung: (b)

Wenn wir die Gleichung $\sqrt{x^2 + y^2} = \sin z$ nach z auflösen, sehen wir, dass eine der Grenzen für z gegeben ist durch $z = \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}$. Wenn man sich den sin vor Augen führt, sieht man zudem, dass die korrekten Grenzen für z in Abhängigkeit von x und y sind: $\arcsin \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$. Somit ist (a) falsch und (b) korrekt.

(c) ist das selbe wie (a), wenn wir Polarkoordinaten verwenden und somit auch falsch, während (d) falsch ist, da es das Volumen eines einfachen Zylinders beschreibt.