Lösungen Quiz 22

Version A

Was ist die Länge der Kurve

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(t-1, -t^2, -3+\frac{2}{3}t^3\right) \end{aligned}$$

(a) $-\frac{8}{3}$

(b) 0

(c) $\frac{5}{3}$

(d) $\frac{8}{3}$

Lösung: (c)
Die Ableitung der Kurve ist gegeben durch $f'(t) = (1, -2t, 2t^2)$ und damit ist die Länge des Tangentialvektors

$$||f'(t)||^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1+2t^2)^2.$$

Die Länge der Kurve ist dann

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 ||f'(t)||\, dt \\ &= \int_0^1 (1+2t^2)\, dt \\ &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Version B

Bitte wenden!

Was ist die Länge der Kurve

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(t-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, 2+\frac{1}{3}t^3\right) \end{aligned}$$

(a) $-\frac{7}{3}$

(b) 0

(c) $\frac{4}{3}$

(d) $\frac{7}{3}$

Lösung: (c)
Die Ableitung der Kurve ist gegeben durch $f'(t) = (1, -\sqrt{2}t, t^2)$ und damit ist die Länge des Tangentialvektors

$$||f'(t)||^2 = 1 + 2t^2 + t^4 = (1+t^2)^2.$$

Die Länge der Kurve ist dann

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 ||f'(t)||\, dt \\ &= \int_0^1 (1+t^2)\, dt \\ &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$