Lösungen Quiz 23

Version A

Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (3x^2 + xy - y^3, -3xy^2 + 2x) = (P,Q)$ und $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Berechne

$$\int_S Pdx + Qdy.$$

(a) -2π

(b) $-\pi$

(c) 0

(d) π

(e) 2π

Lösung: (e)
Der Satz von Green besagt $\int_S Pdx + Qdy = \int_B (Q_x - P_y)\, dxdy$, wobei in diesem Fall $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir berechnen deshalb

$$Q_x - P_y = (-3y^2 + 2) - (x - 3y^2) = 2 - x.$$

Wegen der Symmetrie gilt dann

$$\begin{aligned}\int_B (Q_x - P_y)\, dxdy &= \int_B (2 - x)\, dxdy \\ &= \int_B 2\, dxdy = 2Vol(B) = 2\pi.\end{aligned}$$

Version B

Bitte wenden!

Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (x + y + 3x^2y^2, y + 2x^3y) = (P,Q)$ und $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Berechne

$$\int_S Pdx + Qdy.$$

(a) -2π

(b) $-\pi$

(c) 0

(d) π

(e) 2π

Lösung: (b)
Der Satz von Green besagt $\int_S Pdx + Qdy = \int_B (Q_x - P_y)\, dxdy$, wobei in diesem Fall $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir berechnen deshalb

$$Q_x - P_y = (6x^2y + y) - (1 + 6x^2y) = -1 + y$$

Wegen der Symmetrie gilt dann

$$\begin{aligned} \int_B (Q_x - P_y)\, dxdy &= \int_B (-1 + y)\, dxdy \\ &= \int_B (-1)\, dxdy = -Vol(B) = -\pi. \end{aligned}$$