

Lösungen Quiz 24

Version A

Gegeben seien der Bereich

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x + 1\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy + e^{\sin y} \\ -y^2 + \log x \end{pmatrix}.$$

Der Fluss von \mathbf{K} durch den Rand ∂B von innen nach aussen ist...

- (a) $-\frac{8}{3}$
- (b) $-\frac{4}{3}$
- (c) 0
- (d) $\frac{4}{3}$
- (e) $\frac{8}{3}$

Lösung: (d)

Wir benutzen den Satz von Gauss. Mit $\operatorname{div}(\mathbf{K}) = 2x$ ergibt sich für den Fluss

$$\begin{aligned} \int_B 2x \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_0^{x+1} 2x \, dy dx \\ &= \int_{-1}^1 2x(x+1) \, dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + x^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Version B

Bitte wenden!

Gegeben seien der Bereich

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x - 2 \leq y \leq 0\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2xy + e^{\sin y} \\ -y^2 + xy + \log x \end{pmatrix}.$$

Der Fluss von \mathbf{K} durch den Rand ∂B von innen nach aussen ist...

(a) $-\frac{13}{3}$

(b) $-\frac{2}{3}$

(c) 0

(d) $\frac{2}{3}$

(e) $\frac{13}{3}$

Lösung: (b)

Wir benutzen den Satz von Gauss. Mit $\operatorname{div}(\mathbf{K}) = x$ ergibt sich für den Fluss

$$\begin{aligned} \int_B x \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{x-2}^0 x \, dy dx \\ &= - \int_{-1}^1 x(x-2) \, dx \\ &= - \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$