Lösungen Quiz 24

Version A

Gegeben seien der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$.
Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f$$

Dann ist $\operatorname{div} v = \ldots$

(a) $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^3$

(b) $2(a_1 + a_2 + a_3)$

(c) 0

(d) $2x + 2y + 2z$

Lösung: (d)
Es ist $\nabla f = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$ und damit

$$v = \begin{pmatrix} x^2 + a_2z^2 - a_3y^2 \\ y^2 + a_3x^2 - a_1z^2 \\ z^2 + a_1y^2 - a_2x^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\operatorname{div}(v) = 2(x + y + z)$.

Version B

Bitte wenden!

Gegeben seien der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f(x, y, z) = xy$. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f$$

Dann ist $\operatorname{div} v = \dots$

(a) $a_1 y + a_2 x$

(b) $a_1 x + a_2 y$

(c) 0

(d) $2a_3$

Lösung: (c)
Es ist $\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit

$$v = \begin{pmatrix} y + 0 - a_3 x \\ x + a_3 y + 0 \\ 0 + a_1 x - a_2 y \end{pmatrix}.$$

Also ist $\operatorname{div}(v) = -a_3 + a_3 = 0$.