1.1. Die Produktmetrik Sei X eine Menge. Eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung $(x, y) \mapsto d(x, y)$, die die Eigenschaften

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. *Symmetrie:* Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Dreiecksungleichung:* Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\,.$$

erfüllt.

Es seien jetzt (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf dem Produkt $X := X_1 \times X_2$ werde eine Metrik definiert durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Man zeige, dass $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die Axiome einer Metrik erfüllt.

Lösung: Wir müssen überprüfen, ob die Eigenschaften einer Metrik erfüllt sind. Die Symmetrie ist ganz klar. Für die Positive Definitheit bemerken wir, dass das Maximum zweier nichtnegativer Zahlen nicht negativ sein kann. Ferner gilt

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 &\Leftrightarrow \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_1(x_1, y_1) = 0,\ d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)\,. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, 2\}$, sodass

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} = d_i(x_i, y_i)\,.$$

Es gilt auch für $i \in \{1, 2\}$ und für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

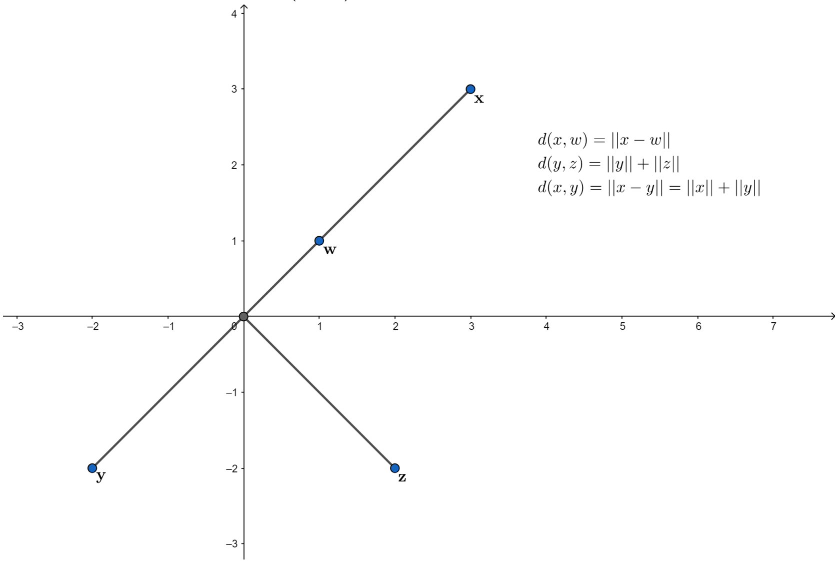
$$d_i(x_i, y_i) \leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i) \leq d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d((z_1, z_2), (y_1, y_2))$$

Beide Ungleichungen zusammen beweisen die Aussage. Wir sind fertig.

1.2. Französische Eisenbahnmetrik Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der *Französischen Eisenbahnmetrik*: Für $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| & \text{wenn } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ und } (0,0) \text{ auf derselben Geraden liegen,} \\ ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ gilt $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Beachte, dass die beiden Definitionen übereinstimmen, falls sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zwar auf einer Gerade durch $(0, 0)$ befinden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunkts.



(a) Verifiziere, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei Y ein metrischer Raum (hier ist $Y = \mathbb{R}^2$). Wir sagen, dass zwei Metriken $d_1, d_2 \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ äquivalent sind, falls sie die gleichen konvergenten Folgen haben, d.h. wenn für alle Folgen $(y_n) \subset Y$ und $y \in Y$ gilt: $\lim_{n\to\infty} d_1(y_n, y) = 0$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} d_2(y_n, y) = 0$. Zeige, dass das oben definierte d nicht äquivalent ist zur euklidschen Metrik $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Betrachte dazu die Folge $\mathbf{x}_n = (2^{-n}, 1)$ und den Punkt $\mathbf{x} = (0, 1)$.

Lösung:

(a) Symmetrie ist klar, positive Definitheit folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $|| \cdot ||$ oder ebenfalls ziemlich direkt aus der Definition.

Für die Dreiecksungleichung wollen wir zeigen, dass $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Dazu müssen wir Fallunterscheidung nach der Lage von $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ machen, denn je nachdem, wie viele und welche davon auf einer Gerade durch $(0,0)$ liegen, ändert sich die Definition der Metrik.

Fall 1: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ liegen alle auf der selben Gerade durch $(0,0)$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| + ||\mathbf{z}-\mathbf{y}|| = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

wobei wir hier genutzt haben, dass wir bereits wissen, dass $||\cdot||$ die Dreiecksungleichung erfüllt.

Fall 2: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ liegen auf der selben Gerade durch $(0,0)$, $\mathbf{z}$ nicht. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{z}|| \\ &= d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt wiederum aus der Dreiecksungleichung für $||\cdot||$, dieses Mal mit Umweg über $(0,0)$.

Fall 3: $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ liegen auf der selben Gerade durch $(0,0)$, $\mathbf{y}$ nicht. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}-\mathbf{z}+\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| \\ &\leq ||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| + ||\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Fall 4: $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ liegen auf der selben Gerade durch $(0,0)$, $\mathbf{x}$ nicht. Dies ist analog zu Fall 3.

Fall 5: Von den drei Punkten liegen keine zwei auf einer Geraden durch $(0,0)$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{z}|| + ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{z}|| = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

(b) Wir betrachten die in der Aufgabe angegebene Folge $(2^{-n},1)$ und rechnen in den beiden Metriken den Abstand jedes Folgengliedes zum Punkt $(0,1)$ aus. In der bekannten euklidschen Metrik ist dies

$$||(2^{-n},1)-(0,1)|| = ||(2^{-n},0)|| = 2^{-n}.$$

Für die französische Eisenbahnmetrik bemerken wir zuerst, dass $(2^{-n},1)$ und $(0,1)$ niemals auf einer Gerade durch $(0,0)$ liegen, wir also immer den zweiten Fall der Definition brauchen und dann haben wir

$$d((2^{-n},1),(0,1)) = ||(2^{-n},1)|| + ||(0,1)|| = \sqrt{(2^{-n})^2+1} + 1 > 2.$$

Wir sehen also, dass der Abstand der Folgeglieder zum Punkt $(0,1)$ gegen 0 geht, die Folge also gegen diesen Punkt konvergiert, während der Abstand in der französischen

Eisenbahnmetrik immer mindestens 2 beträgt, die Folge deshalb also nicht gegen diesen Punkt konvergiert. (Tatsächlich konvergiert diese Folge in der französischen Eisenbahnmetrik überhaupt nicht.) Damit sehen wir also, dass wir in der einen Metrik eine Konvergenz haben, welche wir in der anderen Metrik nicht haben, also sind die beiden Metriken nicht äquivalent.

1.3. Stetigkeit

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} |y/x^2| \cdot 2^{-|y/x^2|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass die Einschränkung $f|_G$ auf jede Gerade G durch den Nullpunkt stetig auf G ist.

(b) Zeige, dass f trotzdem nicht stetig im Nullpunkt ist. Betrachte dazu den Pfad entlang $y = x^2$.

Lösung:

(a) Wir zeigen zuerst die Stetigkeit der Einschränkung auf Geraden.
Auf der Geraden beschrieben durch $x = 0$ ist f konstant 0, also insbesondere stetig. Alle anderen Geraden durch den Nullpunkt lassen sich beschreiben durch $y = a \cdot x$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Einsetzen liefert

$$g(x) := f(x, a \cdot x) = \begin{cases} |a/x| \cdot 2^{-|a/x|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun gilt

$$\lim_{x\to 0} |a/x| \cdot 2^{-|a/x|} = \lim_{k\to\infty} k \cdot 2^{-k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

(b) Auf der Parabel beschrieben durch $y = x^2$ gilt

$$h(x) := f(x, x^2) = \begin{cases} 1 \cdot 2^{-1} = 1/2 & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

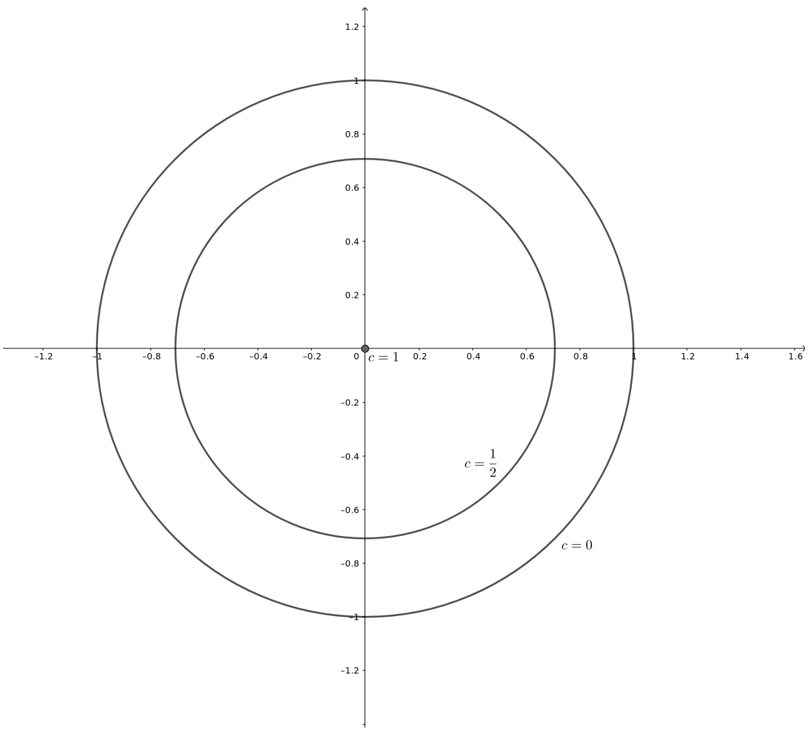
was beweist, dass f an der Stelle $(0,0)$ unstetig ist.

1.4. Niveaumengen/Höhenlinien Bestimme und skizziere die Niveaumengen/Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ zu den Werten $c = 1, \frac{1}{2}, 0$.

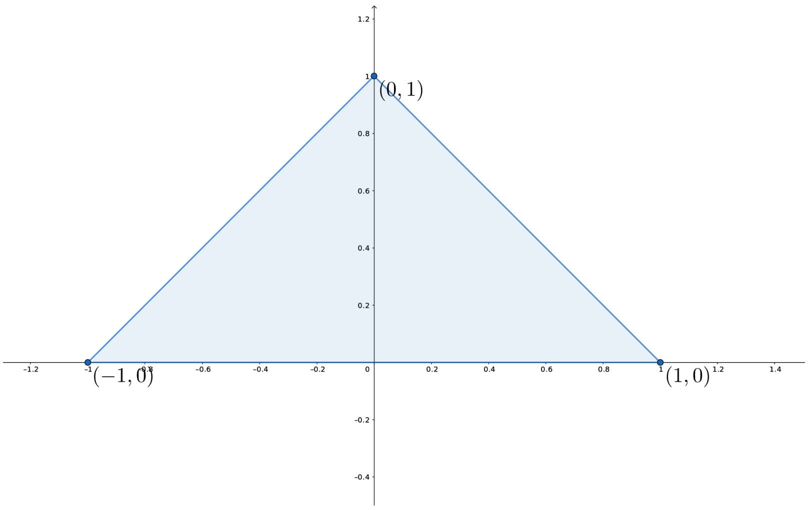
Lösung: Für die Niveaumenge zu einem Niveau d gilt

$$x^2 + y^2 = d,$$

also ein Kreis mit Radius $\sqrt{d}$ (respektive die leere Menge, falls $d < 0$). Die angegebenen Werte sind in folgender Graphik skizziert, wobei in dieser Graphik $c = 1 - d$, also eigentlich umgekehrt zur Aufgabenstellung:



1.5. x-einfach, y-einfach Beschreibe das folgende Dreieck als x-einfachen Bereich respektive als y-einfachen Bereich.



Lösung: Als y-einfachen Bereich:

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \psi(x) \end{aligned}$$

wobei

$$\psi(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Als x-einfachen Bereich:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ -1+y \leq x \leq 1-y \end{aligned}$$

1.6. Partielle Ableitungen Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = x$;

(b) $f(x, y) = e^{xy}$;

(c) $f(x, y) = x^y$;

(d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;

(e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$;

(f) $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Lösung: Es folgt direkt

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y e^{xy},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x e^{xy}$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y x^{y-1},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln x} = \ln x e^{y \ln x} = x^y \ln x$$

(d)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{(x^2+y^2) - (x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) - (x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(e)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy \sin(xy) + x^2 y^2 \cos(xy),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 \sin(xy) + x^3 y \cos(xy)$$

(f)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = y^2 z^3,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2xyz^3,$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 3xy^2 z^2$$