2.1. y-einfacher und x-einfacher Bereich

Wir betrachten die Menge

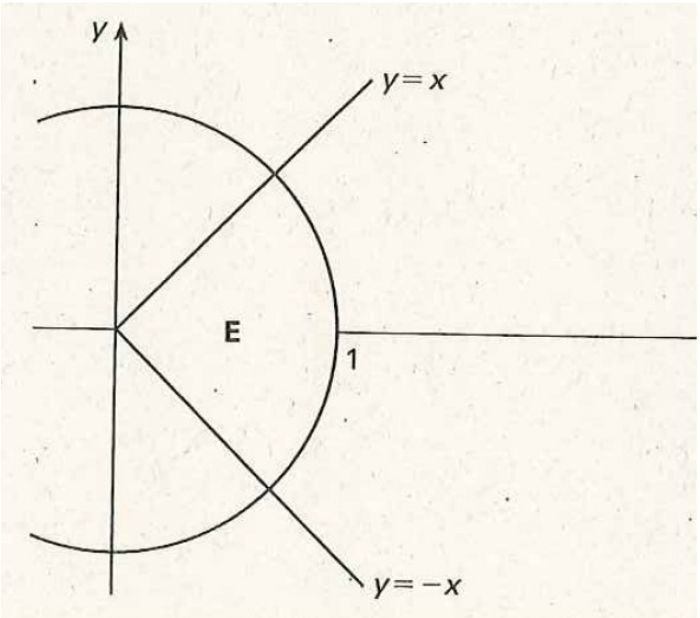
$$E := \{(x,y) : x > 0,\ |y| < x,\ x^2 + y^2 < 1\}\,.$$

(a) Zeichnen Sie das Bild der Menge.

(b) Schreiben Sie diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ als y-einfachen Bereich, falls möglich.

(c) Schreiben Sie diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ als x-einfachen Bereich, falls möglich.

Lösung:



(a)

Aus dem Bild sehen wir, dass $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

(b) Wir definieren die zwei stetigen Funktionen

$$g(y) = \begin{cases} -y & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{2}} < y \leq 0 \\ y & \text{falls } 0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$h(y) = \sqrt{1-y^2}\,, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dann gilt

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}, g(y) < x < h(y)\right\}$$

und wir folgern, dass E ein x-einfacher Bereich ist.

(c) Jetzt definieren wir

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{rl} -x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{array} \right.$$

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{rl} x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1-x^2} & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{array} \right.$$

Dann gilt

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, g(x) < y < h(x)\Big\}$$

und wir folgern, dass E ein y-einfacher Bereich ist.

2.2. Differenzierbarkeit I Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = 0 \\ \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall differenzierbar ist.

Lösung: Als Verkettung von differenzierbaren Funktionen ist f an jeder Stelle $(x,y) \neq (0,0)$ differenzierbar. An der Stelle $(0,0)$ überprüfen wir zunächst ob die partiellen Ableitungen existieren:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$
$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Wir sehen also, dass beide partiellen Ableitungen existieren. Falls f in $(0,0)$ differenzierbar ist, so müsste die Ableitung von f die lineare Abbildung

$$\nabla f(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto < \nabla f(0,0), v >= \partial_x f(0,0) \cdot v_1 + \partial_y f(0,0) \cdot v_2 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$

sein (d.h. $\nabla f(0,0) = 0$).

Wir überprüfen ob diese lineare Abbildung die Definition der Ableitung erfüllt:

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(v_1,v_2)}{||(v_1,v_2)||}$$
$$= \lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} = 0.$$

Hierbei folgt der letzte Grenzwert aus der Abschätzung $\left|\frac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2}\right| \leq |v_1|$. Damit haben wir gezeigt, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist und die Ableitung durch $\nabla f(0,0) = 0$ gegeben ist.

2.3. Differenzierbarkeit II Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass im Ursprung die Richtungsableitung

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\mathbf{e}) - f(\mathbf{0})}{t}$$

für jede Richtung $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ (mit $||\mathbf{e}|| = 1$) existiert.

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht notwendigerweise differenzierbar ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise folgende Funktion:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Lösung:

(a) Aus der Gleichung $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x})$ folgt mit $\lambda = 0$ zunächst $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Für die Richtungsableitungen erhalten wir also:

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{e}t) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^k f(\mathbf{e}) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} t^{k-1} f(\mathbf{e}).$$

Für $k > 1$ ist der Grenzwert offensichtlich 0. Für $k = 1$ ist $t^{k-1} = t^0 = 1$ und der Grenzwert ist $f(\mathbf{e})$.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Diese ist von der Form, die in der Aufgabe vorgegeben ist, denn für $x > 0$ ist

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \lambda \sqrt{x^2+y^2} = \lambda f(x,y)$$

und ganz analog für $x < 0$, das heisst wir haben hier $k = 1$. Wäre nun aber f differenzierbar, so müsste insbesondere das Differential an jeder Stelle eine lineare

Funktion sein (Achtung: linear in den Richtungen in denen man ableitet, nicht linear im Punkt, in denen man das Differential betrachtet!), d.h. $D_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}f(\mathbf{0}) = D_{\mathbf{e}_1}f(\mathbf{0}) + D_{\mathbf{e}_2}f(\mathbf{0})$. Betrachten wir nun Teil a) bedeutet dies im Fall einer homogenen Funktion mit $k = 1$ aber, dass $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2)$. Dies ist aber im gegebenen Fall nicht erfüllt, wie man sieht, indem man z.B. $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ einsetzt.

2.4. Die Kettenregel Sei $x(t) = \cos \pi t$ und $y(t)$ die Stammfunktion von e^{-t^2}, die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\Big|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f\left(x(t), y(t)\right)$ im Punkt $t = 1$.

Lösung: Die Funktion $y(t)$ ist charakterisiert durch die Eigenschaften

$$y'(t) = e^{-t^2}$$

und

$$y(1) = 42\,.$$

Die verallgemeinerte Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right) &= \nabla f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'(t) \\
&= 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) \\
&= 2\cos(\pi t) \cdot (-\pi \sin(\pi t)) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\
&= -2\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\
\frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\Big|_{t=1} &= -2\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \cos(\pi) + 2\underbrace{y(1)}_{42} \cdot e^{-1^2} = 84e^{-1}\,.
\end{aligned}$$

2.5. Vertauschung von Ableitung und Integral Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t)$$

sei gegeben durch

$$F(t) = \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1 + t^2 x}}{x(x+1)}\, dx.$$

Berechnen Sie $\dot{F}(0)$.

Lösung: Wir berechnen $\dot{F}(0)$, wobei die Funktion $t \mapsto F(t)$ durch

$$F(t) := \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx$$

definiert ist. Nach der Leibnizschen Regel darf man zur Ermittlung der Ableitung $\dot{F}(t)$ unter dem Integralzeichen partiell nach t differenzieren. Für unsere Funktion F bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}\int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx \\
&= \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\right)dx + \frac{e^{t(t^2+2)}\sqrt{1+t^2(t^2+2)}}{(t^2+2)(t^2+3)}\frac{d}{dt}(t^2+2) + \\
&\quad - \frac{e^{t(2t+1)}\sqrt{1+t^2(2t+1)}}{(2t+1)(2t+2)}\frac{d}{dt}(2t+1) \\
&= \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{x\,e^{tx}\sqrt{1+t^2x} \;+\; e^{tx}\frac{tx}{\sqrt{1+t^2x}}}{x\,(x+1)}\,dx + \frac{e^{t(t^2+2)}\sqrt{1+t^2(t^2+2)}}{(t^2+2)(t^2+3)}2t + \\
&\quad - \frac{e^{t(2t+1)}\sqrt{1+t^2(2t+1)}}{(2t+1)(2t+2)}2
\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir für $t=0$, dass

$$\left.\frac{d}{dt}F(t)\right|_{t=0} = \int_1^2 \frac{x}{x\,(x+1)}\,dx - 1 = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - 1 = \ln\frac{3}{2} - 1\,.$$

2.6. Tangentialebene Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned}
f\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto \sqrt{1-x^2-y^2},
\end{aligned}$$

wobei $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$.

(a) Berechne die Tangentialebene des Graphen an einer Stelle $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

(b) Skizziere die Situation für $(x_0,y_0)=(0,0)$ respektive $(x_0,y_0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

und somit ist die Tangentialebene gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) \\ &= \sqrt{1-x_0^2-y_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(x-x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(y-y_0). \end{aligned}$$

(b) Für $(x_0,y_0)=(0,0)$ reduziert sich die Gleichung zur sehr einfachen Form

$$z = 1.$$

Für $(x_0,y_0) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ kriegen wir

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{1}{2}\right)$$