5.1. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x - y - z$$

auf der Schnittkurve des elliptischen Zylinders $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ mit der Ebene $3x - 4z = 0$.

Lösung:

Gesucht sind die globalen Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x - y - z$ unter der Nebenbedingung, dass die Funktionen $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 1$ und $h(x, y, z) = 3x - 4z$ beide verschwinden. Zunächst suchen wir alle lokalen Extrema mittels der Lagrangemethode mit 2 Lagrangemultiplikatoren λ und μ. Zu lösen ist dafür die Gleichung

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \nu \nabla h \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit den Gleichungen $g = 0$ und $h = 0$ ergibt dies das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 1 &= 0 \\ 3x - 4z &= 0 \\ 2\lambda x + 3\nu &= 1 \\ 4\lambda y &= -1 \\ -4\nu &= -1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt $\nu = \frac{1}{4}$, woraus man durch Einsetzen in die dritte und vierte Gleichung die Relation $y = -2x$ ableiten kann. Einsetzen in die erste Gleichung liefert sodann $9x^2 - 1 = 0$, also $x = \pm\frac{1}{3}$. Daraus folgt $y = \mp\frac{2}{3}$, sowie durch Einsetzen in die zweite Gleichung $z = \frac{3x}{4} = \pm\frac{1}{4}$. Es gibt also genau die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}\right) = \pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right) =: \pm P.$$

Die dortigen Werte der Funktion f sind:

$$f(\pm P) = \pm\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \pm\frac{3}{4}.$$

Der einzige Kandidat für ein globales Maximum ist also P, der einzige Kandidat für ein globales Minimum $-P$. Es bleibt aber zu zeigen, dass dies wirklich globale Extrema sind. Dies folgt, sobald wir wissen, dass es überhaupt ein globales Maximum bzw. Minimum gibt.

Um die Existenz zu zeigen, beachte zuerst, dass f eine stetige Funktion ist. Sodann ist die durch $g = h = 0$ definierte Teilmenge abgeschlossen, da sie durch zwei Gleichungen in stetigen Funktionen beschrieben ist. Ausserdem ist sie beschränkt, denn die Gleichung $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ impliziert $|x|$, $|y| \leq 1$, und daraus folgt mit der Gleichung $h(x, y, z) = 3x - 4z = 0$ auch $|z| \leq 1$. Daher ist die Menge kompakt. Da jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, existieren die gesuchten Extrema und liegen nach obigem in $\pm P$.

5.2. Die Jacobi-Determinante

Die Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^3 , \qquad x \mapsto y := f(x) ,$$

für eine geeignete offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$y_i := \frac{x_i}{1 - x_1 - x_2 - x_3} , \qquad 1 \leq i \leq 3.$$

Berechne die Jacobi-Determinante $J_f(x)$.

Lösung: Für $x_1 + x_2 + x_3 \neq 1$ haben wir:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1-x_1-x_2-x_3} \\ \frac{x_2}{1-x_1-x_2-x_3} \\ \frac{x_3}{1-x_1-x_2-x_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad df(\mathbf{x}) \quad &= \begin{bmatrix} \frac{1-x_2-x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \\ \frac{x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{1-x_1-x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \\ \frac{x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{1-x_1-x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 - x_2 - x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1 - x_1 - x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1 - x_1 - x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad J_f(x) &= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6}\cdot\det\begin{bmatrix} 1-x_2-x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix} \\
& \quad \text{(Jetzt addiere die zweite und dritte Zeile zur ersten)} \\
&= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6}\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix} \\
& \quad \text{(Jetzt subtrahiere die erste Spalte von der zweiten und dritten)} \\
&= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6}\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1-x_1-x_2-x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & 1-x_1-x_2-x_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6}\cdot(1-x_1-x_2-x_3)^2 \\
&= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^4}
\end{aligned}$$

5.3. Die Jacobi-Matrix

Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2+e^y \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (u,v,w) \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ w \end{pmatrix}\,.$$

Sei $\gamma = \beta \circ \alpha$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von γ.

Lösung:

Bevor wir die Aufgabe lösen erinnern wir uns an die allgemeine Kettenregel. Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ zwei differenzierbare Funktionen. Die Verknüpfung $\mathbf{g}\circ\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist auch differenzierbar und ihre Funktionalmatrix an der Stelle $p \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\left[\frac{\partial(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})}{\partial\mathbf{x}}\right]_p = \left[\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right]_{\mathbf{f}(p)}\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right]_p$$

Die Jacobi-Matrix von α ist

$$\begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Jacobi-Matrix von β ist

$$\begin{pmatrix} v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel bekommen wir daher

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial(x,y)}\right] &= \begin{pmatrix} v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{u=x^2+e^y, v=x+y, w=y} \cdot \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+y & x^2+e^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x^2+2xy+e^y & e^y(x+y+1)+x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5.4. Die Kettenregel

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

sowie die Projektion auf die (y,z)–Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Funktionalmatrix von $\Pi \circ \mathbf{f}$ mittels expliziter Berechnung von $\Pi \circ \mathbf{f}$.

(b) Berechne nochmals diese Funktionalmatrix mit Hilfe der (mehrdimensionalen) Kettenregel.

(c) In welchen Punkten (u,v) ist $\Pi \circ \mathbf{f}$ nicht regulär?

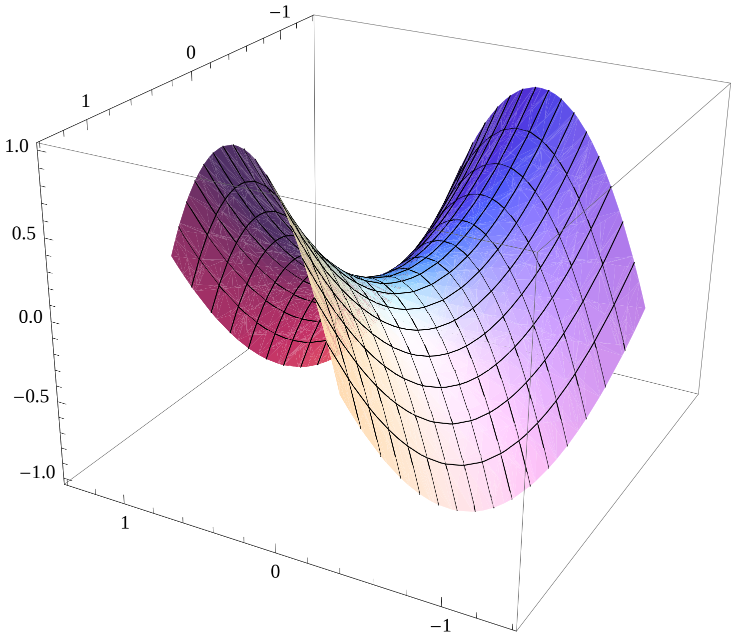
Lösung: Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} ,$$

sowie die Projektion auf die (y, z)–Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 , \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} .$$

Die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Fläche sieht folgendermassen aus:



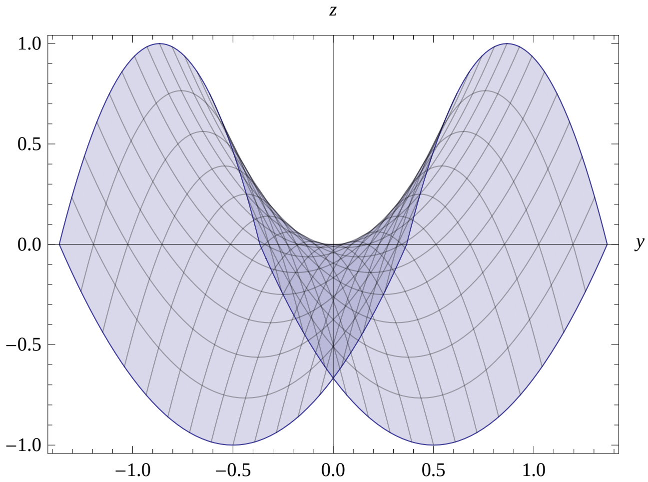
(a) Wir haben

$$(\Pi \circ \mathbf{f})(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} ,$$

also

$$\frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u, v)}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix} .$$

Die Projektion auf die (y, z)-Ebene sieht wie folgt aus



(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(u,v)}(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial(x,y,z)}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die mehrdimensionale Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Pi\circ\mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) &= \frac{\partial \Pi}{\partial(x,y,z)}(\mathbf{f}(u,v))\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(u,v)}(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem, was die Kettenregel besagt.

(c) Wir betrachten die Determinante von $\Pi\circ\mathbf{f}$:

$$\det\frac{\partial(\Pi\circ\mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) = -\sqrt{3}v + u\,.$$

Diese verschwindet genau dann, wenn $u=\sqrt{3}v$ ist. Folglich ist $(\Pi\circ\mathbf{f})(u,v)$ für alle Punkte $(u,v)=(\sqrt{3}t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, nicht regulär.