6.1. Mehrfache Integrale I

Berechnen Sie die folgenden Integralen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x^3+3x^2y+y^3)\,dx\,dy$,

(c) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^1 (\sqrt{y}+x-3xy^2)\,dx\,dy$,

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x)\sin^2(y)\,dx\,dy$,

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy$,

(f) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (e^x+e^y)\,dy\,dx$,

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\Big|_0^1\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\,dy \\
&= \left(\frac{y^2}{6}+\frac{y^3}{6}\right)_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (x^3+3x^2y+y^3)\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{x^4}{4} + x^3y + y^3x\Big|_0^1\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\,dy \\
&= \left(\frac{y}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right)_0^1 \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2)\, dx\, dy &= \int_1^3 \sqrt{y}x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2y^2\Big|_0^1 dy \\
&= \int_1^3 \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y^2\right) dy \\
&= \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2}\right)_1^3 \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{38}{3}\,.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x)\sin^2(y)\, dx\, dy &= \int_0^\pi \sin^2(y)\left(\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx\right) dy \\
&= \int_0^\pi \sin^2(y)\, dy \int_0^\pi \sin^2(x)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{4}\,.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\, dx\, dy &= \int_0^{\pi/2} -\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos(\pi/2+y) + \cos(y)\right) dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\sin(y) + \cos(y)\right) dy \\
&= \left(-\cos(y) + \sin(y)\right)_0^{\pi/2} \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (e^x + e^y)\, dy\, dx &= \int_0^1 ye^x + e^y\Big|_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(e^x + e - 1\right) dx \\
&= \left(e^x + (e-1)x\right)_0^1 \\
&= 2(e-1)\,.
\end{aligned}$$

6.2. Die Jacobi-Determinante

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\,\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\,\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) Erkläre die Bedeutung von f und beschreibe das Bild für festes r.

(b) Berechne die Funktionalmatrix von f.

(c) Berechne die Funktionaldeterminante.

Lösung:

(a) Für festes $r > 0$ und $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ parametrisiert f eine Sphäre vom Radius r. Das erkennen wir wie folgt: Sei der Punkt $\xi = \left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Dann ist die Länge $|f(\xi)| = r$. Ausserdem läuft $r\sin(\theta)$ für $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ von $-r$ bis r. Dadurch erhalten wir alle möglichen Werte für z auf der Sphäre mit Radius r. Für ein solches $z \in [-r, r]$ erhalten wir alle möglichen Werte für x und y durch Variieren von ϕ.

(b) Es gilt

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit

$$\nabla f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Entwickeln nach der letzten Zeile gibt die Determinante

$$\begin{aligned}
\det \nabla f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} &= \sin(\theta) \cdot \begin{vmatrix} -r\sin(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix} \\
&\quad -r\cos(\theta) \cdot \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix} \\
&= \sin(\theta)\, r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,(-\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \\
&\quad -r\cos(\theta)\, r\cos^2(\theta)\,(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) \\
&= -r^2\cos(\theta)(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\
&= -\,r^2\cos(\theta)\,.
\end{aligned}$$

6.3. x-einfacher Bereich

Seien $a, b > 0$ mit $a > b$. Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, bx < y < ax, x^2 y < 1\right\} .$$

Schreiben Sie E als x-einfachen Bereich.

Lösung: Wir lösen das System

$$\begin{cases} xy^2 = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

und erhalten $x = a^{-\frac{1}{3}}$ und $y = a^{\frac{2}{3}}$. Daher folgt $0 < y < a^{\frac{2}{3}}$.

Wir definieren die zwei stetigen Funktionen $\phi(y) = \frac{y}{a}, 0 < y < a^{\frac{2}{3}}$ und

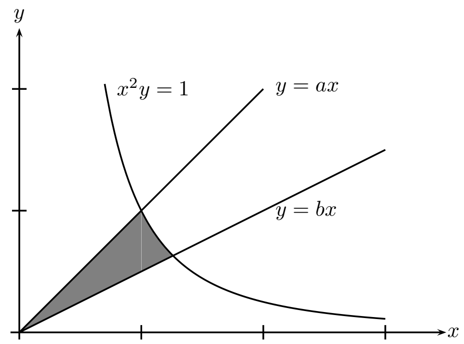
$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{y}{b} , & 0 < y \leq b^{\frac{2}{3}} \\ y^{-\frac{1}{2}} , & b^{\frac{2}{3}} < y < a^{\frac{2}{3}} . \end{cases}$$

Somit bekommen wir $\phi(y) < x < \psi(y)$, d.h.

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < a^{\frac{2}{3}}, \phi(y) < x < \psi(y)\right\} .$$

6.4. Mehrfaches Integral II

Berechne das Integral $\int_B xy \, dx \, dy$ für den schraffierten Bereich B (wobei $a > b > 0$).



Lösung: Wir berechnen das Doppelintegral

$$\int_B xy \, dxdy .$$

Wir verwenden dazu die vorhergehende Aufgabe und schreiben

$$\begin{aligned}
\int_B xy\,dxdy &= \int_0^{b^{\frac{2}{3}}} \left(\int_{\frac{y}{a}}^{\frac{y}{b}} xy\,dx\right) dy + \int_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} \left(\int_{\frac{y}{a}}^{y^{-\frac{1}{2}}} xy\,dx\right) dy \\
&= \int_0^{b^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2}x^2y\Big|_{x=\frac{y}{a}}^{x=\frac{y}{b}} dy + \int_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} x^2y\Big|_{x=\frac{y}{a}}^{x=y^{-\frac{1}{2}}} dy \\
&= \int_0^{b^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2}y^3\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) dy + \int_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{a^2}\,dy \\
&= \frac{1}{8}y^4\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\Big|_0^{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{8}\frac{y^4}{a^2}\Big|_{b^{\frac{2}{3}}}^{a^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{3}{8}(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}).
\end{aligned}$$

*Alternative:*Dazu berechnen wir die Schnittpunkte P_1, P_2

$$P_1 = \left(a^{-\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{und} \quad P_2 = \left(b^{-\frac{1}{3}}, b^{\frac{2}{3}}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_B xy\,dxy &= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \left(\int_{bx}^{ax} xy\,dy\right) dx + \int_{a^{-\frac{1}{3}}}^{b^{-\frac{1}{3}}} \left(\int_{bx}^{\frac{1}{x^2}} xy\,dy\right) dx \\
&= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \frac{1}{2}(a^2-b^2)x^3\,dx + \int_{a^{-\frac{1}{3}}}^{b^{-\frac{1}{3}}} \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x^4}-(bx)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\left(a^{\frac{2}{3}} - \frac{b^2}{a^{\frac{4}{3}}}\right) + \frac{2a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^2}{8a^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{3}{8}\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right).
\end{aligned}$$

6.5. Mehrfache Integrale III

Berechne die folgenden Doppelintegrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_y^{2y} (x+e^y)\,dx\,dy\,,$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} x^2y^3\,dx\,dy\,,$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi^2-y^2} \cos y\,dx\,dy\,.$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_y^{2y}(x+e^y)\,dx\,dy &= \int_0^2\left(\int_y^{2y}(x+e^y)\,dx\right)\,dx\\ &= \int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+e^yx\Big|_y^{2y}\right)\,dy = \int_0^2\left(\frac{3}{2}y^2+ye^y\right)\,dy\\ &= \frac{3}{2}\int_0^2 y^2\,dy+\int_0^2 ye^y\,dy \;=\; \frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^2+\int_0^2 y(e^y)'\,dy\\ &= 4+\left(ye^y\Big|_0^2-\int_0^2 e^y\,dy\right) = 4+2e^2-(e^2-e^0) = 5+e^2\,.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} x^2y^3\,dx\,dy &= \int_1^2\left(\frac{x^3}{3}y^3\right)\Big|_{x=y^{1/3}}^{y}\,dy = \frac{1}{3}\int_1^2\left(y^3\cdot y^3-y\cdot y^3\right)\,dy\\ &= \frac{1}{3}\int_1^2\left(y^6-y^4\right)\,dy = \frac{1}{3}\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_1^2\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}(2^7-1)-\frac{1}{5}(2^5-1)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{127}{7}-\frac{31}{5}\right) = \frac{418}{105}\,.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi^2-y^2}\cos y\,dx\,dy &= \int_{-\pi}^{\pi}\pi^2\cos y\,dy-\int_{-\pi}^{\pi}y^2\cos y\,dy\\ &= \pi^2\sin y\Big|_{-\pi}^{\pi}-\left(y^2\sin y\Big|_{-\pi}^{\pi}-2\int_{-\pi}^{\pi}y\sin y\,dy\right)\\ &= -2y\cos y\Big|_{-\pi}^{\pi}+2\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\,dy = 2(\pi+\pi) = 4\pi\,.\end{aligned}$$