7.1. Mehrfache Integrale I

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

(b) Sei $A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| + |y| < 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{A_1} x^2\,dx\,dy.$$

(c) Sei $A_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le y \le z \le 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{A_2} xyz\,dx\,dy\,dz.$$

(d) Sei $A_3 := \{(x,y) \,|\, |x| \le |y| \le 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{A_3} e^{y^2}\,dx\,dy.$$

(e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy.$$

Lösung:

(a) Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y+z)dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi 2\cos(y+z)\,dy\,dz \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi -4\sin(z)\,dz = -8\end{aligned}$$

(b) Wir wenden Fubini an, wobei wir zunächst in y-Richtung integrieren.

$$\begin{aligned}\int_{A_1} x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 \int_{|x|-1}^{1-|x|} x^2\,dy\,dx = \int_{-1}^1 x^2(1-|x|-|x|+1)\,dx \\ &= 2\int_{-1}^1 x^2 - x^2|x|\,dx = 4\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_{A_2} xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z \frac{1}{2}y^3 z\,dy\,dz = \int_0^1 \frac{1}{8}z^5\,dz = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

(d) Wir berechnen mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_{A_3} e^{y^2}\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 \int_{|y|}^{|y|} e^{y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^1 2|y|e^{y^2}\,dy \\ &= 2\int_0^1 2ye^{y^2}\,dy = 2\,e^{y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = 2(e-1)\end{aligned}$$

(e) Mit Fubini erhalten wir

$$\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{yx}{2})^2}}\,dx\,dy$$

Das innere Integral berechnen wir mit Hilfe der Substitution $t = \frac{y}{2}x$ sowie der bekannten Formel $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Damit folgt

$$\int_0^1 \frac{y}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{yx}{2})^2}}\,dx = \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Mit partieller Integration erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^1 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\arcsin y\,dy \\ &= 2y\arcsin(y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\,\sqrt{1-y^2}\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\end{aligned}$$

7.2. Das Volumen

Berechne das Volumen, welches vom elliptischen Zylinder

$$9x^2 + 4y^2 = 36\,,\ z \geq 0$$

und den Ebenen

$$-y + z = 3$$

und

$$z = 0$$

eingeschlossen wird.

Lösung:

Es gilt $-3 \leq y \leq 3$. Daher ist $z = y + 3 \geq 0$ und die Ebene $z = y + 3$ ist oberhalb der Ebene $z = 0$. Der Körper ist symmetrisch bezüglich der yz-Ebene und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-3}^{3} \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} \int_{0}^{y+3} 1 \, dzdxdy \\
&= \int_{-3}^{3} \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} (y+3) \, dzdxdy \\
&= 2 \int_{-3}^{3} \int_{0}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} (y+3) \, dxdy \\
&= 2 \int_{-3}^{3} (y+3)x \Big|_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} dy \\
&= 2 \int_{-3}^{3} (y+3) \frac{2}{3} \sqrt{9-y^2} \, dy \\
&= \frac{4}{3} \int_{-3}^{3} y\sqrt{9-y^2} \, dy + 4 \int_{-3}^{3} \sqrt{9-y^2} \, dy \\
&= 0 + 2 \cdot 9\pi \\
&= 18\pi \, .
\end{aligned}$$

Beachte, dass im zweitletzten Schritt das Integral von $y\sqrt{9-y^2}$ verschwindet, weil dies eine ungerade Funktion ist und wir über einen symmetrischen Bereich integrieren, d.h. das Integral von -3 bis 0 ist betragsmässig das selbe, wie das Integral von 0 bis 3, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Das zweite Integral beschreibt die Hälfte der Fläche einer Scheibe mit Radius 3, denn diese kann beschrieben werden durch $9\pi = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} 1 \, dxdy = 2 \int_{-3}^{3} \sqrt{9-y^2} \, dy$.

7.3. Schwerpunkt Der Schwerpunkt eines messbaren Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$ mit positiven Volumen $\mathrm{vol}(K) > 0$ ist definiert als der Punkt $S := (s_x, s_y, s_z)$ mit den Koordinaten

$$s_x := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x \, dxdydz \qquad s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K y \, dxdydz, \qquad s_z := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K z \, dxdydz$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Simplex

$$\Delta^3 := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \geq 0 \mid x+y+z \leq 1\Big\}.$$

Lösung:

Wir berechnen das Volumen von Δ^3 mit dem Satz von Fubini als iteriertes Integral:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Delta^3) &= \int_{\Delta^3} dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = \left[\frac{1}{6}(x-1)^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Wir berechnen als nächstes s_x. Hierfür verwenden wir wiederum Fubini und integrieren zunächst in z und y Richtung und zuletzt in x Richtung:

$$\begin{aligned}
s_x &:= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta^3)} \int_{\Delta^3} x\, dxdydz = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x\, dz\right) dy\right) dx \\
&= 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)x\, dy\right) dx \\
&= 6 \int_0^1 \left[(y(1-x) - \frac{1}{2}y^2)x\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= 3 \int_0^1 (1-x)^2 x\, dx \\
&= \int_0^1 3x - 6x^2 + 3x^3\, dx \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{3}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die Integrale für s_y und s_z auf die gleichen iterierten Integrale führen. Für s_y gilt beispielsweise

$$s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta^3)} \int_{\Delta^3} y\, dxdydz = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{1-x-y} y\, dz\right) dx\right) dy.$$

Dies ist das gleiche Integral wie oben (wenn wir die x und y Variablen entsprechend umbenennen). Die Rechnung von oben zeigt nun $s_y = \frac{1}{4}$ und analog erhält man auch

$s_z = \frac{1}{4}$. Folglich gilt

$$S_{\Delta^3} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

7.4. Mehrfache Integrale II

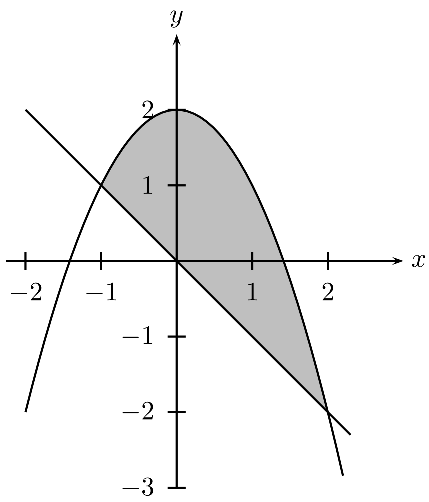
Vertausche in den folgenden Integralen die Integrationsreihenfolge:

(a) $\int_{-1}^{2} \left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$,

(b) $\int_{0}^{2} \left(\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx \right) dy$.

Lösung:

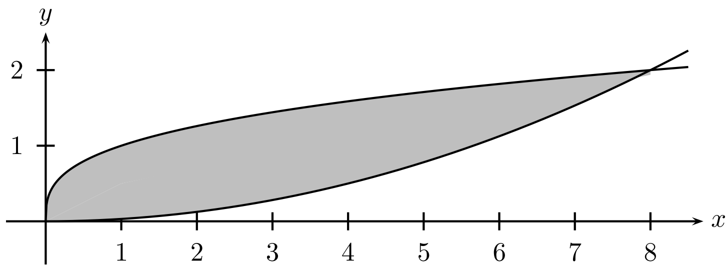
(a) Das Gebiet worüber integriert wird, sieht folgendermassen aus:



Daraus folgt:

$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_{-2}^{1} \left(\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_{1}^{2} \left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx \right) dy$$

(b) Das Gebiet sieht hier folgendermassen aus:



Und darum ergibt die Umkehrung der Integrationsreihenfolge:

$$\int_0^2 \left(\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^8 \left(\int_{\frac{x^2}{32}}^{x^{\frac{1}{3}}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

7.5. Mehrfache Integrale III

Berechnen Sie das Integral

$$\int_E (x+y-z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

wobei

$$E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 2 \Big\}$$

ist.

Lösung: Die Menge E ist z-einfach, weil

$$E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in T, 0 < z < 2-x-y \Big\}$$

gilt, wobei

$$\begin{aligned} T &= \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x+y < 2 \Big\} \\ &= \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 0 < y < 2-x \Big\} \end{aligned}$$

ist.

Wir bekommen daher

$$\int_E (x+y-z)\, dx\, dy\, dz = \int_T \left(\int_0^{2-x-y} (x+y-z)\, dz \right) dx\, dy\,.$$

Das innere Integral ist gleich

$$\int_0^{2-x-y} (x+y-z)\,dz = \left(xz + yz - \frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=2-x-y} = 4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_E (x+y-z)\,dx\,dy\,dz &= \int_T \left(4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2 \right) dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left[4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2 \right] dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[4xy + 2y^2 - \frac{3}{2}\left(x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) - 2y \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx = \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right)_0^2 \\
&= 2 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$