8.1. Das Volumen Berechne das Volumen, welches vom Zylinder

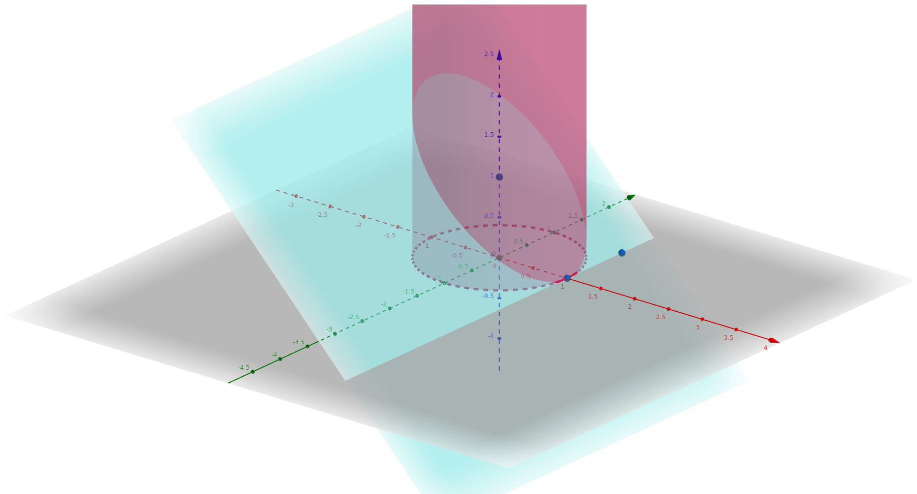
$$x^2 + y^2 = 1\,,\ z \geq 0$$

und der Ebene

$$x + z = 1$$

eingeschlossen wird.

Lösung: Zuerst veranschaulichen wir uns die Situation:



Hierbei sehen wir, dass sich Zylinderkoordinaten mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

anbieten. Die Jacobideterminante dieser Transformation ist r. (Beachte, dass Zylinderkoordinaten diesbezüglich Polarkoordinaten entsprechen.)

Wichtig ist auch, zu sehen, dass für alle (x, y) mit $x^2 + y^2 \leq 1$ gilt, dass die Ebene $x + z = 1$ über der Ebene $z = 0$ liegt. In den transformierten Koordinaten ist der Körper dann also gegeben durch

$$K = \{(r, \phi, z) \mid r \in [0, 1],\ \phi \in [0, 2\pi],\ 0 \leq z \leq 1 - r\cos\phi\}$$

wobei die Bedingung für z daher kommt, dass $0 \leq z \leq 1 - x$ und $x = r\cos\phi$.

Wir können das Integral deshalb folgendermassen aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r\cos\phi} r \, dz dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r\cos\phi) r \, dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^2 \cos\phi) \, dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cos\phi \right)_0^1 d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos\phi \right) d\phi \\
&= \pi \, .
\end{aligned}
$$

8.2. Rotationskörper I

(a) Sei $z_0 > 0$. Berechne das Volumen des Paraboloiden

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq z_0,\, x^2 + y^2 \leq z\}$$

(b) Theoretische Überlegung: Kann man mit der selben Methode auch das Volumen eines schräg angeschnittenen Paraboloiden der Form

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z\} \cap \{(x, y, z) \mid z \leq 1 + y\}$$

berechnen?

Lösung

(a) Die bekannte Formel für Rotationskörper ergibt

$$
\begin{aligned}
V(K) &= \pi \int_0^{z_0} z \, dz \\
&= \pi \frac{z^2}{0} \Big|_0^{z_0} \\
&= \frac{\pi z_0^2}{2}.
\end{aligned}
$$

(b) Die Methode für Rotationskörper funktioniert nur, wenn der Körper tatsächlich rotationssymmetrisch bezüglich einer bestimmten Achse ist, was mit der schrägen Schnittebene nicht mehr der Fall ist.

8.3. Variablentransformation

(a) Bestimmen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ den Flächeninhalt des Gebietes

$$A_1 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq ax + by \leq 1,\ 0 \leq cx + dy \leq 1\Big\}.$$

(b) Bestimmen Sie für $0 < a < b$ und $0 < c < d$ den Flächeninhalt des Gebietes

$$A_2 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq ye^{-x} \leq b,\ c \leq ye^{x} \leq d\Big\}.$$

(c) Berechnen Sie für $A_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq 2x - 3y \leq 4\}$ das Integral

$$\int_{A_3} \sqrt{x+y}\, dxdy.$$

Lösung:

(a) Betrachte die Substitution

$$r : A_1 \to [0, 1]^2, \qquad r(x, y) := (ax + by, cx + dy).$$

und schreibe $(u, v) = r(x, y)$. Da r gerade der Multiplikation mit der nicht singulären Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entspricht, ist r ein Diffeomorphismus und es gilt

$$J_r = \left|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|$$

sowie

$$J_r^{-1} = |ad - bc|^{-1}$$

Der Transformationssatz liefert nun

$$\mathrm{vol}_2(A_1) = \int_{A_1} 1\, dxdy = \int_{[0,1]^2} |ad - bc|^{-1}\, dudv = |ad - bc|^{-1},$$

wobei vol_2, das zweidimensionale Volumen, einfach Fläche ist.

(b) Betrachte den Diffeomorphismus

$$r : A_2 \to [a, b] \times [c, d], \qquad r(x, y) = (ye^{-x}, ye^{x}).$$

und schreibe $(u, v) = r(x, y)$. Man prüft leicht, dass r in der Tat eine bijektive Abbildung ist und es gilt

$$J_r = \left|\det \begin{pmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} \\ ye^{x} & e^{x} \end{pmatrix}\right| = 2y.$$

Folglich ist $\left(\frac{\partial r}{\partial(x,y)}\right)$ in jedem Punkt des Definitionsbereichs invertierbar und somit ein Diffeomorphismus. Die Ableitung der Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$J_r^{-1} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Mit dem Transformationssatz folgt schliesslich

$$\mathrm{vol}_2(A_2) = \int_{A_2} 1\,dxdy = \int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{2\sqrt{uv}}\,dudv = 2(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{d}-\sqrt{c}).$$

(c) Wir betrachten analog zu Teil (a) die Substitution

$$r : A_3 \to [0,1]\times[0,4], \qquad (u,v) := r(x,y) := (x+y, 2x-3y).$$

Dann gilt

$$J_r = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\right| = 5$$

sowie für die Umkehrabbildung

$$J_r^{-1} = \frac{1}{5}.$$

Mit dem Transformationssatz folgt nun

$$\int_{A_3} \sqrt{x+y}\,dxdy = \int_{[0,1]\times[0,4]} \frac{\sqrt{u}}{5}\,dudv = \frac{4}{5}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{8}{15}.$$

8.4. Rotationskörper II

Wir betrachten den Rotationskörper K, der entsteht, wenn man die Funktion $f(x) = x^2+1$ auf dem Intervall $[-1,1]$ um die x-Achse rotiert.

(a) Schreibe K als Menge auf und skizziere den Körper.

(b) Berechne das Volumen von K.

Lösung:

(a) Der Körper K ist gegeben durch

$$K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -1\le x\le 1,\ y^2+z^2 \le (x^2+1)^2\}.$$

(b) Das Volumen ist mit der bekannten Formel für Rotationskörper gegeben durch

$$\begin{aligned}
V(K) &= \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx \\
&= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{56}{15}\pi.
\end{aligned}$$

8.5. Der Schwerpunkt

Wir betrachten den Körper

$$\Omega := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt von Ω.

Lösung:

Aus Symmetriegründen könnten wir sofort darauf schliessen, dass $x_S = 0$ und $y_S = 0$. (Symmetrie im Sinn von: $(x,y,z) \in \Omega$ genau dann wenn $(-x,y,z) \in \Omega$; erzwingt, dass die x-Komponente des Schwerpunkts 0 sein muss.) Wir werden im folgenden aber auch zeigen, wie man dies berechnen kann.

Zuerst berechnen wir die Masse von Ω: (B bezeichnet die Menge $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$)

$$\begin{aligned}
m(\Omega) &= \int_\Omega dxdydz \\
&= \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^{1} dz \right) dxdy \\
&= \int_B \left(1 - x^2 - y^2 \right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(1 - r^2 \right) r \, dr \right] d\phi \\
&= 2\pi \left[\int_0^1 \left(r - r^3 \right) \, dr \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Jetzt wollen wir $\int_\Omega x\,dxdydz$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x\,dxdydz &= \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^1 x\,dz\right) dxdy \\
&= \int_B x\left(1-x^2-y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r\cos\phi\left(1-r^2\right) r\,dr\right] d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\phi\,d\phi\right)\cdot\left(\int_0^1 r^2(1-r^2)\,dr\right) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Darum folgt

$$x_S = \frac{\int_\Omega x\,dxdydz}{m(\Omega)} = 0\,.$$

Analog kann man beweisen, dass $y_S = 0$ ist.

Es verbleibt z_S zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega z\,dxdydz &= \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^1 z\,dz\right) dxdy \\
&= \int_B \left(\frac{1}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(1-r^4\right) r\,dr\right] d\phi \\
&= \pi\left[\int_0^1 \left(r-r^5\right)\,dr\right] \\
&= \pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right)_0^1 \\
&= \frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

und darum

$$z_S = \frac{\pi/3}{m(\Omega)} = \frac{\pi/3}{\pi/2} = \frac{2}{3}\,.$$

Der Schwerpunkt von Ω ist

$$S = \left(0, 0, \frac{2}{3}\right)\,.$$

8.6. Die Gesamtmasse

Sei B der Tetraeder, welcher von dem Koordinaten Ebenen und dem Ebene $x+y+z=2$ berandet ist. Berechnen Sie die Gesamtmasse von B bezüglich der Dichte $\rho(x,y,z) = y^2$.

Lösung:

Wir betrachten die Menge

$$B' = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2-y\} \ .$$

Dann können wir B schreiben als

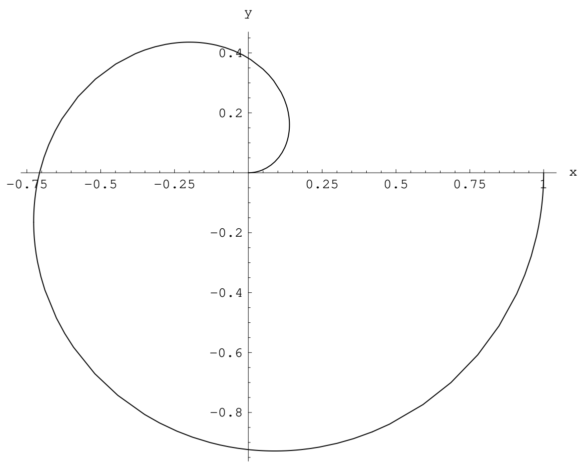
$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in B', 0 \leq z \leq 2-x-y\} \ .$$

Das Gesamtmasse ist

$$\begin{aligned}
m(B) &= \int_B y^2 dV \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-x-y} y^2 \, dz dx dy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} y^2(2-x-y) \, dx dy \\
&= \int_0^2 (2y^2(2-y) - \frac{(2-y)^2 y^2}{2} - y^3(2-y)) \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) \, dy \\
&= \frac{8}{15} \, .
\end{aligned}$$

8.7. Variablentransformation II

In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\varphi \mapsto (\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos(\varphi), \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos(\varphi))$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, begrenzt.



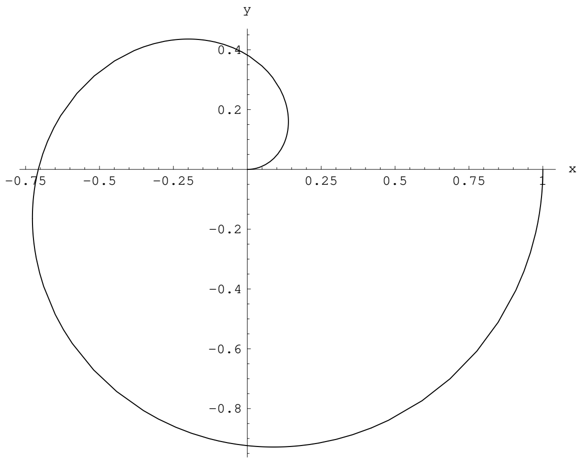
Man berechne das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Lösung:

Zur Berechnung eignen sich am besten Polarkoordinaten (ρ, φ).

$$B = \left\{ (\rho, \varphi) \;\middle|\; 0 \leq \rho \leq \sin\left(\tfrac{\varphi}{4}\right),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$$

$V = \iint\limits_B \sqrt{1 - \rho^2}\, dF$ mit $dF = \rho\, d\rho\, d\varphi$.



$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin(\varphi/4)} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\,(1-\rho^2)^{3/2}\Big]_0^{\sin(\varphi/4)} d\varphi$$
$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\cos^3\Big(\frac{\varphi}{4}\Big) - 1\Big)\,d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{4}\cos\Big(\frac{3\varphi}{4}\Big) + \frac{3}{4}\cos\Big(\frac{\varphi}{4}\Big) - 1\Big)\,d\varphi$$
$$= -\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{3}\sin\Big(\frac{3\varphi}{4}\Big) + 3\sin\Big(\frac{\varphi}{4}\Big) - \varphi\Big]_0^{2\pi} = -\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{3} + 3 - 2\pi\Big) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$$

8.8. Das Volumen II

Berechne das Volumen, welches vom Paraboloid

$$z = x^2 + 2y^2$$

und der Ebene

$$2x - 8y + z = 7$$

eingeschlossen wird.

Lösung:

Zunächst bestimmen wir die Schnittkurve der Ebene mit dem Paraboloid. Einsetzen der Paraboloid-Gleichung in die Ebenengleichung ergibt

$$2x - 8y + x^2 + 2y^2 = 7$$

und somit

$$(x+1)^2 + 2(y-2)^2 = 16.$$

Also ist die Schnittkurve (projiziert auf die xy-Ebene) eine Ellipse mit Halbachsen 4 und $2\sqrt{2}$. Wir führen somit die Ellipsen-Koordinaten

$$\begin{cases} x &= 4r\cos(\phi) - 1 \\ y &= 2\sqrt{2}r\sin(\phi) + 2 \end{cases} \qquad (r,\phi) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

ein. Die Jacobische Determinante der Transformation ist

$$\det \begin{pmatrix} 4\cos\phi & -4r\sin\phi \\ 2\sqrt{2}\sin\phi & 2\sqrt{2}r\cos\phi \end{pmatrix} = 8\sqrt{2}r\,.$$

Das zugehörige Flächenelement beträgt $dA = 8\sqrt{2}r\,dr\,d\phi$.

Beachte, dass für alle (x,y) in dieser Ellipse gilt, dass das Paraboloid $z = x^2 + 2y^2$ unterhalb der Ebene $z = 7 - 2x + 8y$ liegt. Dies sieht man, indem man sich überlegt, dass der Rand der Ellipse genau die Punkte sind, wo das Paraboloid und die Ebene gleich hoch sind und dass damit im Inneren entweder das Paraboloid überall oberhalb der Ebene liegt oder umgekehrt. Dass das Paraboloid unterhalb der Ebene liegt, sieht man, wenn man z.B. den Punkt $(1,-2)$ einsetzt. Wir können also bis zur Ebene integrieren und davon dann das Integral bis zum Paraboloid abziehen.

Das Volumen unter der Ebene beträgt

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_E (7 - 2x + 8y)\,dA = 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (25r - 8r^2\cos(\phi) + 16\sqrt{2}r^2\sin(\phi))\,d\phi\,dr \\ &= 200\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Das Volumen unter dem Paraboloid beträgt

$$\begin{aligned} V_2 &= \iint_E (x^2 + 2y^2)\,dA \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \left((4r\cos(\phi) - 1)^2 + 2\left(2\sqrt{2}r\sin(\phi) + 2\right)^2\right) r\,d\phi\,dr \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (16r^3\cos^2(\phi) - 8r^2\cos(\phi) + r + 16r^3\sin^2(\phi) \\ &\qquad\qquad + 16\sqrt{2}r^2\sin\phi + 8r)\,d\phi\,dr \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (16r^3 - 8r^2\cos(\phi) + 16\sqrt{2}r^2\sin(\phi) + 9r)\,d\phi\,dr \\ &= 16\pi\sqrt{2}\int_0^1 (16r^3 + 9r)\,dr = 136\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Das eingeschlossene Volumen ist also

$$V = V_1 - V_2 = (200 - 136)\pi\sqrt{2} = 64\pi\sqrt{2} \approx 284.34$$