9.1. Der Zykloidenbogen

Ein Zykloidenbogen lässt sich folgendermassen parametrisieren:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Berechne die Länge dieser Kurve.

Lösung: Es ist die Länge $L(\gamma)$ der Kurve

$$\begin{array}{rcl} \gamma \;:\; [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix} \end{array}$$

zu bestimmen. Diese ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\ \mathrm{d}t \ = \ a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t \ = \ -4a\,\cos\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -4a\cdot(-1) + 4a\cdot 1 \ = \ 8a\,. \end{aligned}$$

Die gesuchte Länge der Kurve γ ist also

$$L(\gamma) = 8a\,.$$

9.2. Linienintegrale

Berechne die folgenden Wegintegrale im $\mathbb{R}^2$:

(a) $\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, wobei γ die Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(-1, 1)$ zum Punkt $(1, 1)$ durchläuft.

(b) $\int_\gamma xy^2\,dy$, wobei γ den Halbkreis $\{(x,y) : x^2+y^2=4, y\geq 0\}$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(c) $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, wobei γ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0)$ und $(0,1)$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

(a) Wir parametrisieren γ durch $\gamma(t) = (x(t),y(t))^t = (t,t^2)^t, t\in[-1,1] \Rightarrow \dot\gamma(t) = (1,2t)^t$.
Dann ist das Integral des Vektorfelds $\lambda(x,y) = (x+y, x-y)$ entlang γ nach Definition

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda &= \int_{-1}^1 \lambda(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_{-1}^1 (x(t)+y(t), x(t)-y(t))\cdot\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix}dt\\ &= \int_{-1}^1 (t+t^2)\cdot 1 + (t-t^2)\cdot 2t\,dt = \int_{-1}^1 (-2t^3+3t^2+t)\,dt = 2\end{aligned}$$

(b) $\lambda(x,y) = (0,xy^2)$ auf $\mathbb{R}^2$. Wir parametrisieren den Halbkreis durch (t=Polarwinkel)

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos t, 2\sin t).$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \lambda = \int_0^\pi \lambda(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi (0, 8\sin^2 t\cos t)\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}\mathrm{d}t = 16\int_0^\pi \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

Zum Berechnen des Integrals benutzen wir die Doppelwinkelformeln

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) = 1-2\sin^2(\alpha).$$

Also ist der Integrand

$$\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{8}(1-\cos(4t))$$

und das Integral wird

$$\int_\gamma \lambda = 2\int_0^\pi 1-\cos(4t)\mathrm{d}t = 2t - \tfrac{1}{2}\sin(4t)|_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi$$

.

(c) Wir teilen den Weg in drei Teile auf (jeweils die Seiten des Dreiecks) und berechnen die einzelen Wegintegrale, die wir am Schluss dann addieren.
Von $(0,0)\to(1,0)$:
$\gamma_1(t) = \binom{t}{0}, \quad (0\leq t\leq 1), \dot\gamma(t) = \binom{1}{0}$ und damit

$$\int_{\gamma_1}\lambda = \int_0^1 (t^2,t^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Von $(1,0) \to (0,1)$:
$\gamma_2(t) = \binom{1-t}{t}, \quad (0 \leq t \leq 1), \dot{\gamma}(t) = \binom{-1}{1}$ daher:

$$\int_{\gamma_2} \lambda = \int_0^1 ((1-t)^2 + t^2, (1-t)^2 - t^2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -2t^2 dt = -\frac{2}{3}.$$

Von $(0,1) \to (0,0)$:
$\gamma_3(t) = \binom{0}{1-t}, \quad (0 \leq t \leq 1) \quad \dot{\gamma}(t) = \binom{0}{-1}$ mit Integral

$$\int_{\gamma_3} \lambda = \int_0^1 \left((1-t)^2, -(1-t)^2\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda + \int_{\gamma_3} \lambda = 0.$$

9.3. Linienintegrale II

Berechne das Linienintegral $\int_\gamma \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$ des Vektorfelds $\mathbf{K}$ längs der Kurve γ in den folgenden Fällen:

(a) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ -5z \\ 10x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [1,2]\,;$

(b) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ -2y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0, 2\pi]\,;$

(c) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+z \\ -2x^2+y \\ e^z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$

Lösung: Sei

$$\gamma : \ t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \quad a \leq t \leq b$$

ein beliebiger Weg und $\mathbf{K}$ ein beliebiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Das *Arbeitsintegral* oder *Linienintegral* entlang dem Weg γ ist dann definiert als

$$\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt\,.$$

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K}\cdot d\mathbf{x} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} 3(t^2+1)\cdot 2t^2 \\ -5t^3 \\ 10(t^2+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^2 (12t^5 + 12t^3 - 20t^4 + 30t^4 + 30t^2)\, dt \\
&= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\, dt \\
&= (2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3)\Big|_1^2 \\
&= 2^7 + 2^6 + 3\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 - (2+2+3+10) \\
&= 303\,.
\end{aligned}$$

(b) Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K}\cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ -2\sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (\sin^2(t)\cos(t) + 2\sin^2(t)\cos(t))\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 3\sin^2(t)\cos(t)\, dt = -\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

(c) Zuletzt berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K}\cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2(t) + t \\ -2\cos^2(t) + \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos^2(t)\sin t - t\sin t - 2\cos^3(t) + \sin(t)\cos(t) + e^t)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (t\sin(t) + 2\cos^3(t))\, dt + \left(\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t) + e^t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\int_0^{2\pi} (t\sin(t) + 2\cos^3(t))\, dt + e^{2\pi} - 1\,.
\end{aligned}$$

Es bleiben die Integrale $\int_0^{2\pi} t\sin(t)\, dt$ und $\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)\, dt$ zu berechnen. Es folgt mittels partieller Integration

$$\int_0^{2\pi} t\sin(t)\, dt = -t\cos(t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t)\, dt = -2\pi\,.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)\,dt &= 2\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2(t)\right)\cos(t)\,dt \\ &= 2\sin(t)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos(t)\,dt = -2\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos(t)\,dt \\ &= -\frac{2}{3}\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_\gamma \mathbf{K}\cdot d\mathbf{x} = 2\pi + e^{2\pi} - 1\,.$$

9.4. Das Potential

(a) Das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (y^2+5, 2xy-8)$ ist konservativ. Berechne ein Potential, wie in Satz 3.12.

(b) Für das selbe Vektorfeld, berechne ein Potential mit folgender Methode: Sei $f(x,y)$ das noch unbekannte Potential. Es muss also gelten $\nabla f = \mathbf{K}$. Schreibe diese Gleichungen explizit hin und versuche sie zu lösen, indem du nach x respektive y integrierst.

Hinweis: Wenn man eine von x und y abhängige Funktion nach y integriert, dann ist die dabei entstehende Integrationskonstante eine von x abhängige Funktion und umgekehrt.

(c) Vergleiche die Lösungen von (a) und (b).

(d) Betrachte nun das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (x^2-2y^3, x+5y)$ und versuche, die Methode von (b) anzuwenden. Was geschieht?

(e) Was würde geschehen, wenn man die Methode zur Bestimmung eines Potentials von Satz 3.12 auf dieses Vektorfeld anwendet?

Lösung:

(a) Da wir bereits wissen, dass $\mathbf{K}$ konservativ ist, folgt, dass das Linienintegral

$$f(P) := \int_{P_0}^{P} K\cdot \mathrm{d}x$$

nicht von der Wahl eines Wegs von P_0 nach P abhängt, und definiert für jeden festen Anfangspunkt $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Potential zu K. Der Einfachheit halber wählen wir als Weg die gerade Strecke

$$\gamma \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1],$$

von $P_0 := \binom{0}{0}$ nach $P = \binom{x}{y}$. Das Potential f ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 K\begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} y^2t^2 + 5 \\ 2xyt^2 - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big[xy^2t^2 + 5x + 2xy^2t^2 - 8y \Big] \mathrm{d}t \\
&= \Big[xy^2t^3 + (5x - 8y)t \Big]_{t=0}^{1} \\
&= xy^2 + 5x - 8y\,.
\end{aligned}$$

(b) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = y^2 + 5$ folgt dann mit dem unbestimmten Integral

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int (y^2+5)\,dx = (y^2+5)x + g(y) = xy^2 + 5x + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ noch von y abhängen darf! Ableiten dieser Gleichung nach y liefert

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy + g'(y).$$

Andererseits gilt

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy - 8,$$

also $g'(y) = -8$ und somit $g(y) = -8y + c$ für eine Konstante c. Somit ist

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy^2 + 5x - 8y + c$$

ein Potential zu K.

(c) Die in (a) und (b) enthaltenen Lösungen unterscheiden sich höchstens durch eine Konstante, so wie sich je zwei Potentiale zu einem Vektorfeld um höchstens eine Kostante unterscheiden.

(d) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = x^2 - 2y^3$ folgt durch Integration nach x, dass

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int (x^2 - 2y^3)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - 2xy^3 + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ von y, aber keinesfalls von x, abhängen darf. Durch Ableiten dieser Gleichung nach y erhalten wir

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6xy^2 + g'(y).$$

Zusammen mit der Gleichung

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 5y,$$

schliessen wir daraus, dass gilt $g'(y) = 6xy^2 + x + 5y$. Dies ist ein Widerspruch, da die Funktion g und damit auch ihre Ableiung nur von y abhängen darf. Folglich existiert kein Potential

(e) Das Potential, wie in Satz 3.12 für konservative Vektorfelder ist in diesem Falle nicht mehr wohldefiniert. Denn man könnte zwar irgendeinen Pfad vom Ursprungspunkt fixieren und entlang dieses integrieren, aber das erfüllt nur dann die Bedingungen eines Potentials, wenn dies dasselbe ergibt, wie entlang jedes beliebigen anderen Pfades.