10.1. Satz von Green I

Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe des Satzes von Green:

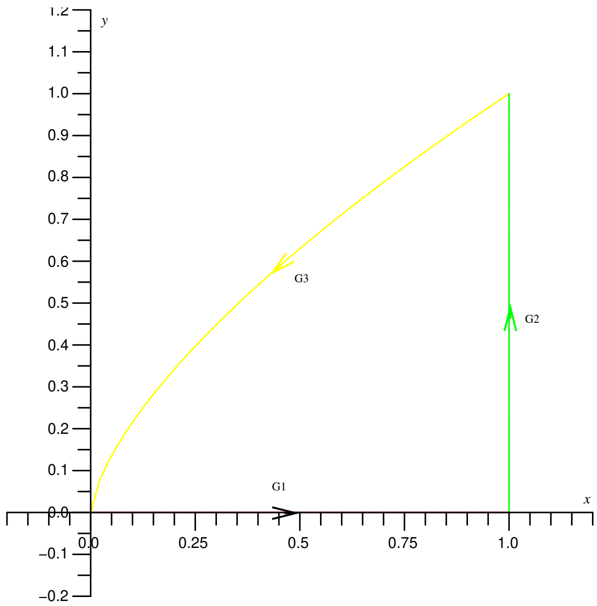
(a) $I_a := \oint_{\partial B} \left[xy\,dx + x^2\,dy \right]$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{2/3} \right\}$

(b) $I_b := \oint_{\partial B} \left[y\,dx + \sin(x)\,dy \right]$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos(x) \right\}$

Lösung:

(a) Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{2/3} \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die drei Randstücke G_1, G_2 und G_3 durch die drei Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^{2/3} \end{pmatrix},$$

wobei wir jeweils $t \in [\,0, 1\,]$ wählen. Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}\,(1-t)^{-1/3} \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} K \cdot dx = \int_{\gamma_1} \Big\langle K(\gamma_1(t)), \dot{\gamma}_1(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} x(t)\, y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 0 \, dt = 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} K \cdot dx = \int_{\gamma_2} \Big\langle K(\gamma_2(t)), \dot{\gamma}_2(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} x(t)\, y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 1 \, dt = 1
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} K \cdot dx = \int_{\gamma_3} \Big\langle K(\gamma_3(t)), \dot{\gamma}_3(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} x(t)\, y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (1-t)^{5/3} \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}\,(1-t)^{-1/3} \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \Big[-(1-t)^{5/3} - \frac{2}{3}\,(1-t)^{5/3} \Big] \, dt = \int_0^1 -\frac{5}{3}\,(1-t)^{5/3} \, dt \\
&= \left[\frac{5}{8}\,(1-t)^{8/3} \right] \Big|_0^1 = -\frac{5}{8} \,.
\end{aligned}
$$

Da die Parametrisierungen der Randkurvenstücke so gewählt wurden, dass der Rand ∂B mit wachsenden Kurvenparametern jeweils im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, gilt

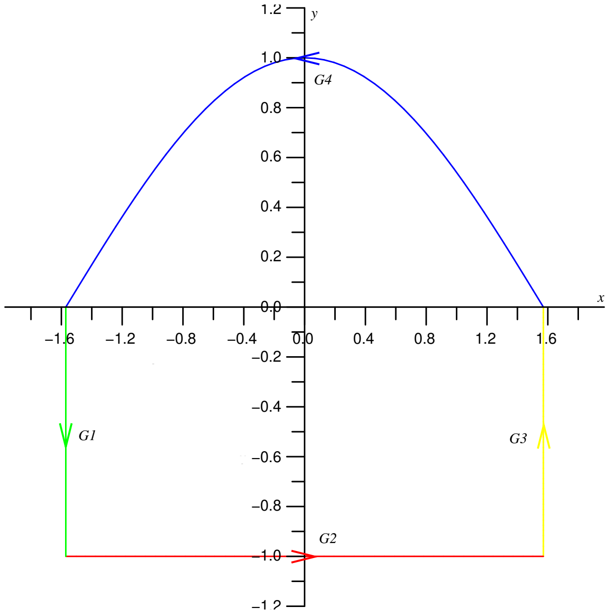
$$
I_a = \oint_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \,.
$$

Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
I_a &= \oint_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \Big[K_x^2 - K_y^1 \Big] \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^{2/3}} [\, 2x - x \,] \, dy \, dx = \int_0^1 x \cdot x^{2/3} \, dx = \int_0^1 x^{5/3} \, dx = \frac{3}{8} \,.
\end{aligned}
$$

(b) Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq y \leq \cos(x) \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die vier Randstücke G_1, G_2, G_3 und $-G_4$ durch die vier Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}+t\pi \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$
$$\gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_4 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \dot\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$I_1 := \int_{\gamma_1} K \cdot dx = \int_{\gamma_1} \left\langle K(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t) \right\rangle dt = \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 1 \, dt = 1,$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} K \cdot dx = \int_{\gamma_2} \Big\langle K(\gamma_2(t)), \dot{\gamma}_2(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + t\pi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = -\pi \int_0^1 1 \, dt = -\pi
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} K \cdot dx = \int_{\gamma_3} \Big\langle K(\gamma_3(t)), \dot{\gamma}_3(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} K \cdot dx = \int_{\gamma_4} \Big\langle K(\gamma_4(t)), \dot{\gamma}_4(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_4} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos(t) - \sin^2(t) \Big] \, dt \\
&= \sin(t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \, .
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der Durchlaufrichtungen der gewählten Parametrisierungen der Randkurvenstücke gilt

$$
I_b = \oint_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 1 - \pi + 1 - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{2} \, .
$$

Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

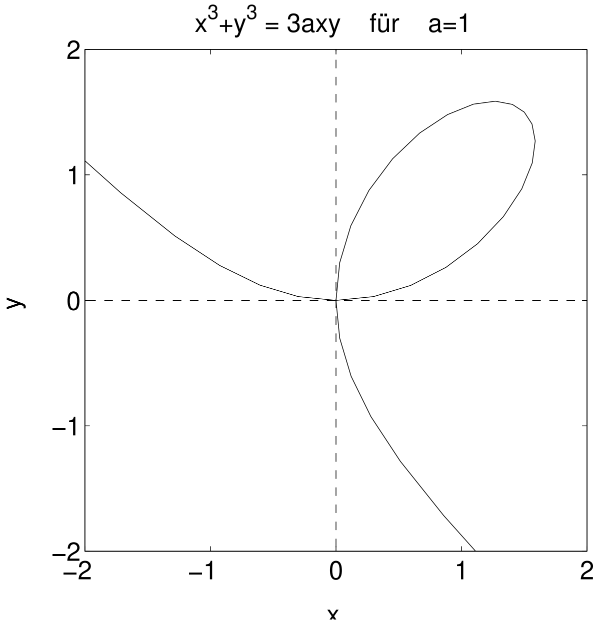
$$
\begin{aligned}
I_b &= \oint_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \operatorname{rot}(K) \, dB = \int_B \Big[K_x^2 - K_y^1 \Big] \, dx \, dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{\cos(x)} [\cos(x) - 1] \, dy \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) - 1] \cdot [\cos(x) + 1] \, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos^2(x) - 1 \Big] \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \, dx \\
&= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \, .
\end{aligned}
$$

10.2. Satz von Green II

Es sei $a > 0$ ein Parameter. Betrachte das kartesische Blatt, welches durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

gegeben ist.



Bestimme den Flächeninhalt der geschlossenen Schleife.

Lösung:

(a) Setzen wir $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, so wissen wir nach dem Satz der impliziten Funktionen, dass sich die Kurve überall dort lokal als Graph schreiben lässt, wo $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Berechne deshalb

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{ax},$$

falls $x \geq 0$ und keine Lösung für $x < 0$. Setzen wir dies nun in die ursprüngliche Gleichung ein, um zu sehen, welche dieser Punkte tatsächlich auf der Kurve liegen, so ergibt sich

$$F(x, \sqrt{ax}) = x^3 + (ax)^{\frac{3}{2}} - 3ax\sqrt{ax} = x^{\frac{3}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} - 3a^{\frac{3}{2}} \right),$$

Die Nullstellen davon sind $x = 0$ und $x = 2^{\frac{2}{3}}a$. Die Kurve lässt sich also überall, ausser bei den Punkten $(0,0)$ und $(2^{\frac{2}{3}}a, \sqrt{a2^{\frac{2}{3}}a}) = (2^{\frac{2}{3}}a, 2^{\frac{1}{3}}a)$ als Graph einer Funktion schreiben.

(b) Um die Randkurve des Kartesischen Blattes zu parametrisieren gehen wir wie folgt vor.
Falls $x \neq 0$ ist, wählen wir den Kurvenparameter so, dass gilt

$$y = xt\,.$$

Wir setzen dies in die Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$ ein und lösen nach x auf:

$$x^3 + y^3 = x^3 + t^3x^3 = 3ax^2t \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3at}{1+t^3}\,.$$

Falls $x = 0$ ist, ist $y = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$.
Insgesamt erhalten wir die parametrisierte Kurve

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{3at}{1+t^3}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \;\; t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

In der Bemerkung weiter unten wird ausgeführt, dass der geschlossene Teil des Kartesischen Blattes genau die Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{3at}{1+t^3}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, +\infty)\,,$$

ist und, dass die Fläche links von der so parametrisierten Kurve liegt.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes von B betrachten wir das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \;\text{ mit }\; \mathrm{rot}(K) = K^2_x - K^1_y = 1.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}[B] &= \int_B d\mu = \int_B \mathrm{rot}(K)\,d\mu \overset{\text{Green}}{=} \oint_{\partial B} K \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\partial B} x\,dy = \int_0^\infty x(t)\,\dot{y}(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3} \cdot \frac{6at\cdot(1+t^3) - 3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}\,dt \\
&= 3a^2 \int_0^\infty \frac{6t^2\cdot(1+t^3) - 3t^3\cdot 3t^2}{(1+t^3)^3}\,dt = 3a^2\int_0^\infty \frac{2(1+t^3) - 3t^3}{(1+t^3)^3}\,3t^2\,dt
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $u := 1 + t^3 \;\Rightarrow\; du = 3t^2\,dt,\; u(0) = 1,\; \lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ folgt

$$\begin{aligned}\text{Fläche}[B] &= 3a^2 \int_1^\infty \frac{2u - 3(u-1)}{u^3}\,du = 3a^2 \int_1^\infty \left[3u^{-3} - u^{-2}\right] du \\ &= 3a^2 \left[-\frac{3}{2}\,u^{-2} + u^{-1}\right]\Bigg|_1^\infty = 3a^2 \left[\frac{3}{2} - 1\right] = \frac{3}{2}\,a^2.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des geschlossenen Teils des Kartesischen Blattes beträgt $\frac{3}{2}\,a^2$.

Bemerkung: Als Begründung, dass der geschlossene Bereich der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

durch das Intervall $0 \le t < +\infty$ parametrisiert wird, müssen wir den Verlauf der Kurve analysieren.

Bei $t = -1$ wird die Parametrisierung singulär: Für $t \to -1^-$ geht $x \to -\infty$, $y \to +\infty$, für $t \to -1^+$ geht $x \to +\infty$, $y \to -\infty$. Das Bild der Kurve geht in verschiedene Richtungen ins Unendliche. Interessant ist, dass die Summe

$$x + y = \frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} = \frac{3at(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{3at}{1-t+t^2} \overset{t\to-1}{\to} -a$$

dabei beschränkt bleibt, das heisst die Kurve schmiegt sich asymptotisch an die Gerade $x + y = -a$ an.

Die Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist in jedem Punkt $t \neq -1$ stetig, und auch für $t \to +\infty$ oder $t \to -\infty$ exitieren die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit der Abschnitt der Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \neq t_2$, geschlossen ist, müssen die Endpunkte die gleichen Bilder haben, das heisst $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$.
Die Kurve kann sich auf keinem endlichen Teilintervall schliessen, denn für $x(t) \neq 0$ gilt stets $t = \frac{y(t)}{x(t)}$, woraus der Widerspruch $t_1 = t_2$ folgt. Ausserdem wird $x(t) = 0$ nur für einen endlichen Wert, $t = 0$, angenommen.

Im Unendlichen gilt jedoch auch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \overset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$. Deshalb ist die Kurve auf dem Intervall $t \in [0, +\infty)$ geschlossen. Die Endpunkte werden beide auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet.
Das andere Intervall $t \in (-\infty, 0]$ ist nicht zulässig, weil die Kurve bei $t = -1$ nicht definiert ist und ins Unendliche geht.

Bleibt die Frage zu klären, warum das Innere der Schleife

$$t \in [0, +\infty) \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$$

links von der Kurve liegt, wie es für die Anwendung der Green–Formel notwendig ist. Das liegt daran, dass für $t \neq 0$ die Gleichung

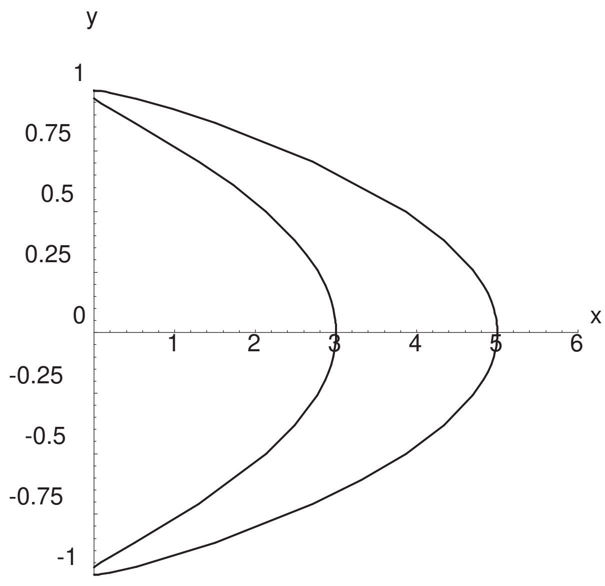
$$t = \frac{y(t)}{x(t)}$$

gilt, aus der folgt, dass t der Anstieg der Geraden ist, die die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ verbindet. Ausserdem gilt für $t \in [0, +\infty)$, dass $x(t), y(t) > 0$ ist.
Folglich liegt die Kurve im ersten Quadranten, beginnt für $t = 0$ im Ursprung und verläuft dann, wenn man mit t von 0 zu $+\infty$ läuft, so, dass der Anstieg ($= t$) des Vektors $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ständig wächst, bis am Ende für $x \to +\infty$ die Kurve wieder im Nullpunkt endet. Das kann nur sein, wenn das Innere des von der Kurve umschlossenen Gebietes links von der Kurve liegt.

10.3. Satz von Green III

Die Randkurve ∂B des Bumerangs B, (siehe die Zeichnung unten) kann parametrisiert werden durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [\,0, 2\pi).$$



Bestimme den Schwerpunkt von B.

Hinweis: Berechne das Integral

$$\int_B x\,dx\,dy$$

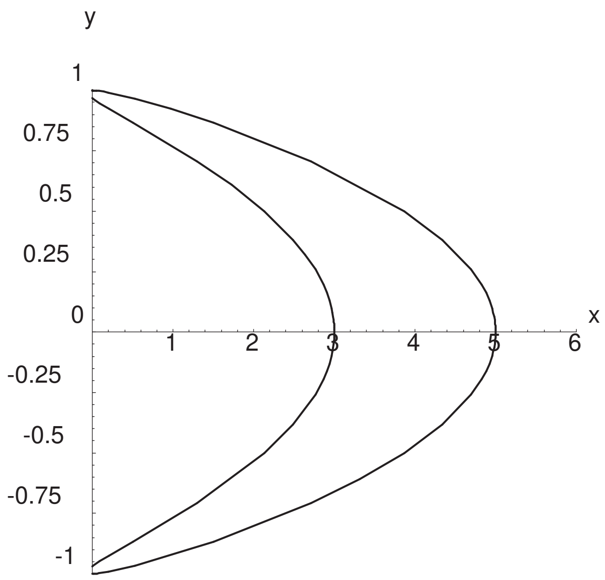
mit Hilfe eines geeignet gewählten Vektorfeldes $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mit $Q_x - P_y \equiv x$.
Benutze ferner die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\,dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t)\,dt = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

Die Randkurve ∂B des, in untenstehender Figur dargestellten, Bumerangs B kann parametrisiert werden durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [\,0, 2\pi).$$



Zur Berechnung des Flächeninhaltes von B betrachten wir das Vektorfeld

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{rot}(L) := \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = 1.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Fläche}[B] &= \int_B d\mu = \int_B \operatorname{rot}(L)\, d\mu = \oint_{\partial B} L \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\partial B} x\, dy = \int_0^{2\pi} x(t)\, \dot{y}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[4\cos^2(t) + \cos(t) \Big] \cos(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss die y–Koordinate y_s des Schwerpunktes verschwinden und es bleibt die x–Koordinate x_s zu berechnen. Dazu betrachten wir das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{rot}(K) = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = x.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{\text{Fläche}[B]} \int_B x \, d\mu = \frac{1}{\text{Fläche}[B]} \int_B \operatorname{rot}(K) \, d\mu \\
&= \frac{1}{\text{Fläche}[B]} \oint_{\partial B} K \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi} \oint_{\partial B} \frac{x^2}{2} \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) \, \dot{y}(t) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[4 \, \cos^2(t) + \cos(t) \Big]^2 \cos t \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[16 \cos^5(t) + 8 \cos^4(t) + \cos^3(t) \Big] \, dt = \frac{8}{2\pi} \frac{3\pi}{4} = 3.
\end{aligned}$$

Wobei wir uns den Hinweis in der Aufgabenstellung zu Nutze gemacht haben:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t) \, dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t) \, dt = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Der Schwerpunkt des Bumerangs ist also

$$S_B = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$