11.1. Das Potential

Betrachte in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das Umlaufintegral

$$I := \oint_\gamma K \cdot dx$$

um den Kreis γ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $M := \binom{0}{0}$.

(b) Zeige durch Konstruktion eines Potentials, dass K konservativ ist.

(c) Verifiziere durch explizite Rechnung, dass K die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$$

erfüllt.

Lösung:

(a) Der Kreis mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt am Ursprung kann auf folgende Weise durch Polarkoordinaten parametrisiert werden:

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [\,0, 2\pi)\,.$$

Daraus erhalten wir

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}, \; K(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \frac{-2R\cos(t)\cdot R\sin(t)}{(R^2)^2} \\ \frac{R^2\cos^2(t) - R^2\sin^2(t)}{(R^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} K(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) &= \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{R}\Big[\,2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) - \cos(t)\sin^2(t)\Big] \\ &= \frac{1}{R}\,\cos(t)\Big[\,\cos^2(t) + \sin^2(t)\Big] = \frac{1}{R}\,\cos(t). \end{aligned}$$

Das Umlaufintegral berechnet sich also zu

$$\int_\gamma K \cdot dx = \int_0^{2\pi} K(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\,\cos(t)\,dt = \frac{1}{R}\sin(t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

(b) Wir suchen ein Potential von K, d.h. eine Funktion $f\binom{x}{y}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ mit

$$\nabla f = K$$

oder in Komponenten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,. \tag{1}$$

Wir lösen die erste Gleichung in (1) durch unbestimmte Integration nach x (y ist dabei eine Konstante) und erhalten

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \int \frac{-y}{u^2}\,du = \frac{y}{u} + C(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y),$$

wobei wir die Substitution $u = u(x) := x^2 + y^2$ mit $du = 2x\,dx$ verwendet haben. Jetzt setzen wir $f\binom{x}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$ in die zweite Gleichung in (1) ein und finden

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) \stackrel{!}{=} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

woraus folgt

$$C'(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; C(y) = C = \text{konst.}$$

Die Funktion

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{x^2+y^2} + C\,,$$

ist daher ein Potential von K, wobei für C eine beliebige Konstante gewählt werden kann (z.B. $C = 0$). Das Feld K ist damit ein Gradientenfeld und folglich konservativ.

(c) Für ein Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1\binom{x}{y} \\ K_2\binom{x}{y} \end{pmatrix}$$

lautet die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$, was wir durch direkte Rechnung nachprüfen können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} K &= \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
&= \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&\quad + \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 4x + 2x(x^2+y^2) - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{4x\Big[(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\Big] - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{8xy^2 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Da ein Potential existiert, sind alle Umlaufintegrale bei Teil a) identisch. Dass sie $= 0$ sind ist Zufall und folgt nicht aus Teil b) und c), denn $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ist kein zulässiges Gebiet.

11.2. Satz von Green

Definiere das Vektorfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{K}(x,y) := \begin{pmatrix} \cos(x) + y \\ e^{y^2} - x^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s}$$

entlang des Einheitskreises $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$, im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

Lösung:

Mit dem Satz von Green gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (\partial_x K_2 - \partial_y K_1)\, dxdy \\
&= \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (\partial_x (e^{y^2} - x^2) - \partial_y (\cos(x) + y))\, dxdy \\
&= \int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (-2x - 1)\, dxdy \\
&= -\mathrm{vol}_2(\{x^2 + y^2 \leq 1\}) = -\pi.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt benutzt, dass das Integral vom $-2x$ über die Menge $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ aus Symmetriegründen verschwindet: Das Integral über den rechten Halbkreis ist minus das Integral über den linken Halbkreis.

11.3. Linienintegral

Betrachte das Vektorfeld

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s}$$

wobei $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

(b) Begründen Sie, warum der Satz von Green in Teil (a) nicht angewendet werden kann.

Lösung:

(a) Wir parametrisieren den Kreis mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \to S^1, \qquad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Diese durchläuft den Kreis im Gegenuhrzeigersinn und es gilt (mit $x^2 + y^2 = 1$):

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

(b) Wir können den Satz von Green nicht auf den Einheitskreis $D := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ anwenden, da das Vektorfeld $\mathbf{K}$ im Punkt $(0,0)$ nicht definiert ist und sich auch nicht in diesen Punkt stetig fortsetzten lässt. Ebenso können wir den Satz von Green nicht auf das Gebiet $\dot{D} := \{0 < x^2 + y^2 < 1\}$ anwenden, da dieses Gebiet nicht glatt berandet ist: Es gilt $\partial\dot{D} = S^1 \cup \{(0,0)\}$ und der Randpunkt $\{(0,0)\}$ ist singulär bzw. nicht Teil eines eindimensionalen Randstücks.

Man sieht auch leicht, dass die Aussage des Satzes von Green in diesem Beispiel nicht mehr erfüllt ist, da

$$\begin{aligned}\partial_x f_2 - \partial_y f_1 &= \partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \partial_y \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Hinweis: Das einzige, was man hier machen könnte, ist ein Gebiet der Form $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ zu betrachten, für $0 < a < 1$, das würde das Problem aber nicht vereinfachen, da wir nun einfach über einen Kreis mit Radius a integrieren müssten.

11.4. Satz von Gauss

Gegeben seien das Dreieck

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$K := \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Berechne den Fluss von K durch den Rand ∂B von innen nach aussen

(a) als Flussintegral,

(b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Lösung:

(a) Der Rand ∂B des Dreiecks B wird durch die drei Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \ \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

für $t \in [\,0,1\,]$ parametrisiert, welche die Tangentialvektoren

$$\dot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \dot\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben, mit den Beträgen

$$\left|\dot\gamma_1\right| = \left|\dot\gamma_2\right| = 1 \ \text{ und } \ \left|\dot\gamma_3\right| = \sqrt{2}\,.$$

Des Weiteren benötigen wir die nach aussen weisenden Normalenvektorfelder

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des Vektorfeldes K durch den Rand ∂B des Dreiecks B von innen nach aussen ist das Flussintegral

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{\partial B} K \cdot N \, ds = \sum_{n=1}^{3} \int_{\gamma_n} K \cdot N_n \, d\gamma_n = \sum_{n=1}^{3} \int_0^1 K \cdot N_n \left|\dot\gamma_n\right| dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -(1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \, dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} 1 \, dt \\
&\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(1-t)t - t^2 \\ (1-t)^2 + t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \sqrt{2} \, dt \\
&= \int_0^1 [\,1-t\,]^2 dt - \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 \Big[\, 2(1-t)t - t^2 + (1-t)^2 + t^2 \,\Big] dt \\
&= \int_0^1 \Big[\, (t-1)^2 - t^2 + (t-1)^2 - 2t(t-1) \,\Big] dt \\
&= \int_0^1 \Big[-t^2 - 2t + 2 \Big] dt = \Big[-\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t \Big]_0^1 = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

(b) Die Divergenz von K ist

$$\operatorname{div}(K) = K^1_x + K^2_y = 2y + 2y = 4y$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauss erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\partial B} K \cdot N \, ds = \int_B \operatorname{div}(K)\, d\mu = \int_0^1\!\!\int_0^{1-x} 4y \, dy \, dx \\ &= 4\int_0^1 \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1-x} dx = 2\int_0^1 [\,1-x\,]^2 \, dx = -\frac{2}{3}\,[\,1-x\,]^3\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$