12.1. Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

Seien f ein Skalarfeld und $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f := \nabla f$.
Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die *Divergenz* von K ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}.$$

Formuliere und beweise koordinatenfreie Identitäten der Form

$$\operatorname{rot}(fK) = (\operatorname{grad} f) \times K + f \cdot \operatorname{rot} K.$$

(a) $\operatorname{div}(fK) = \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K$

(b) $\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \ \dots$

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = \ \dots$

(e) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) = \ \dots$

Lösung: Wir setzen voraus, dass $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder im Raum sind, während $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir kürzen ausserdem ab: $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ etc.

(a) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fK) &= \partial_x(fK_1) + \partial_y(fK_2) + \partial_z(fK_3) \\ &= (\partial_x f) \cdot K_1 + f \cdot (\partial_x K_1) + (\partial_y f) \cdot K_2 + f \cdot (\partial_y K_2) + (\partial_z f) \cdot K_3 + f \cdot (\partial_z K_3) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} + f \cdot (\partial_x K_1 + \partial_y K_2 + \partial_z K_3) \\ &= \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K. \end{aligned}$$

(b) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(K \times L) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} K_2L_3 - K_3L_2 \\ K_3L_1 - K_1L_3 \\ K_1L_2 - K_2L_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(K_2L_3 - K_3L_2) + \partial_y(K_3L_1 - K_1L_3) + \partial_z(K_1L_2 - K_2L_1) \\
&= K_2\partial_x L_3 - K_3\partial_x L_2 + L_3\partial_x K_2 - L_2\partial_x K_3 + K_3\partial_y L_1 - K_1\partial_y L_3 \\
&\quad + L_1\partial_y K_3 - L_3\partial_y K_1 + K_1\partial_z L_2 - K_2\partial_z L_1 + L_2\partial_z K_1 - L_1\partial_z K_2 \\
&= -K_1(\partial_y L_3 - \partial_z L_2) + L_1(\partial_y K_3 - \partial_z K_2) - K_2(\partial_z L_1 - \partial_x L_3) \\
&\quad + L_2(\partial_z K_1 - \partial_x K_3) - K_3(\partial_x L_2 - \partial_y L_1) + L_3(\partial_x K_2 - \partial_y K_1) \\
&= -K \cdot \operatorname{rot} L + L \cdot \operatorname{rot} K \\
&= L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L\,.
\end{aligned}$$

(c) Durch Anwenden der Definition der Rotation und des Gradienten sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} = 0\,.$$

(d) Durch Anwenden der Definitionen der Divergenz und der Rotation sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} \partial_y K_3 - \partial_z K_2 \\ \partial_z K_1 - \partial_x K_3 \\ \partial_x K_2 - \partial_y K_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x\partial_y K_3 - \partial_x\partial_z K_2 + \partial_y\partial_z K_1 - \partial_y\partial_x K_3 + \partial_z\partial_x K_2 - \partial_z\partial_y K_1 = 0\,.
\end{aligned}$$

(e) Durch Anwenden der Resultate aus den Teilaufgaben a) und d) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) \overset{\text{a)}}{=} \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K + f \cdot \operatorname{div}(\operatorname{rot} K) \overset{\text{d)}}{=} \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K\,.$$

12.2. Der Flächeninhalt

Berechne die Oberfläche des Teils der oberen Hemisphäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2+y^2+z^2=a^2\,,\ z\geq 0 \right\},$$

der vom Zylinder

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, (x-\frac{a}{2})^2+y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$$

ausgeschnitten wird.

Lösung: Ist $a<0$, so liefert $|a|$ anstelle von a dasselbe Ergebnis, da die Fläche lediglich der Spiegelung $(x,y,z)\mapsto(-x,y,z)$ unterworfen wird. Wir können also der Einfachheit halber $a>0$ annehmen. Die Hemisphäre vom Radius a parametrisieren wir in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r}(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \sqrt{a^2-r^2} \end{pmatrix} \qquad \text{für } 0<r\leq a \text{ und } -\pi\leq\phi<\pi.$$

Das (skalare) Flächenelement dieser Parametrisierung lautet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\right| \mathrm{d}\mu(r,\phi) \\
&= \left| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}\mu(r,\phi) \\
&= \left| \begin{pmatrix} \frac{r^2\cos\phi}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ \frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ r \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}\mu(r,\phi) \\
&= \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}\mu(r,\phi)\,.
\end{aligned}$$

Nun liegt $\mathbf{r}(r,\phi)$ im fraglichen Zylinder genau dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
&& \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 &\leq \frac{a^2}{4} \\
\iff && x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2 &\leq \frac{a^2}{4} \\
\iff && x^2+y^2 &\leq ax \\
\iff && r^2 &\leq ar\cos\phi \\
\iff && r &\leq a\cos\phi\,.
\end{aligned}$$

Diese Bedingung kommt also zu den bereits genannten Bedingungen $0 < r \leq a$ und $-\pi \leq \phi < \pi$ hinzu. Sie kann aber nur gelten, wenn $\cos\phi \geq 0$ ist, d. h., wenn gilt $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Andererseits ist sowieso $a\cos\phi \leq a$. Der fragliche Bereich ist also beschrieben durch die beiden Ungleichungen $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ und $r \leq a\cos\phi$. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher gleich

$$\begin{aligned}
\int_B \mathrm{d}\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\phi} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a\sqrt{a^2-r^2}\Big|_{r=0}^{a\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a^2\left(\sqrt{1-\cos^2\phi}-1\right)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\left(1-|\sin\phi|\right)\,\mathrm{d}\phi \\
&= a^2(\pi-2)\,.
\end{aligned}$$

12.3. Der Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$

Sei $M := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$, $G := \{(x_1,x_2,x_3) \in M \,|\, |x_3| \leq 1\}$ und $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie M und G.

(b) Berechnen Sie

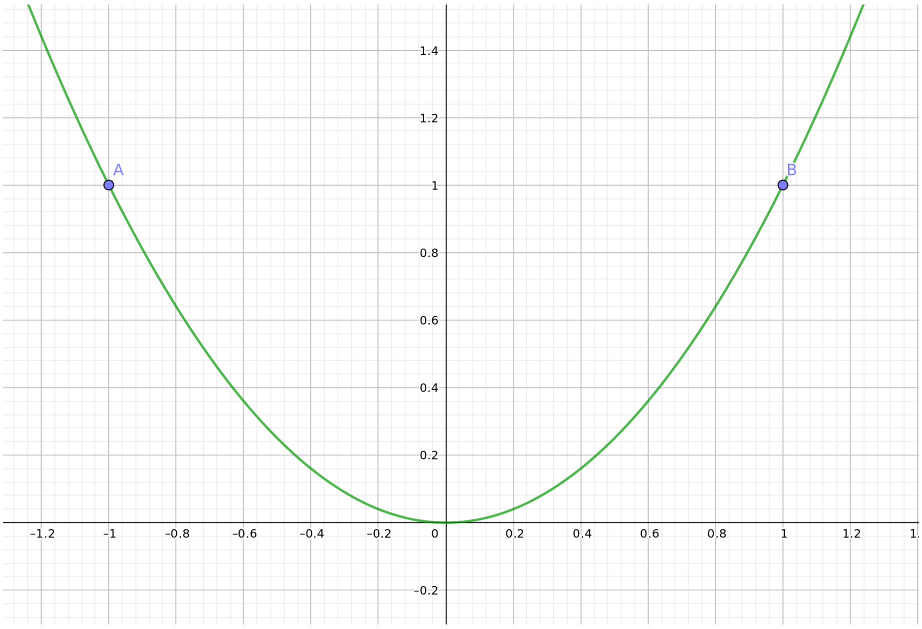
$$\int_G \mathbf{K}\cdot d\omega$$

direkt mit der Definition.

(c) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Lösung:

(a) Die Menge M ist ein Rotationskörper zu der Funktion $z \mapsto \sqrt{z}$, G ist abgeschnitten auf der Höhe $z = 1$. Die folgende Skizze zeigt einen Querschnitt in der $x-z$-Ebene, die Punkte A und B sind Randpunkte von G



(b) Wir parametrisieren G als Graph über der Einheitskreisschreibe:

$$\psi : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leq 1\} \to M, \qquad \psi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Flächenelement ist definiert durch

$$dS = ||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||\, dudv$$

In unserem Fall gilt

$$\partial_u \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \qquad \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt liefert ein Normalenvektorfeld auf M. Da es in die gleiche Richtung wie ν zeigt, folgt

$$\mathbf{n}(\psi(u,v)) = \frac{\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)}{||\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)||}.$$

Insgesammt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_G \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \mathbf{K}(\psi(u,v)) \cdot (\partial_u \psi(u,v) \times \partial_v \psi(u,v)), dudv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} dudv \\
&= \int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} (-2u(u^2+v^2) - 2uv + v)\, dudv \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass aus Symmetriegründen die Integrale über die jeweiligen Summanden verschwinden. Bspw. ist das Integral von $u(u^2+v^2)$ über die linke Hälfte mit $u < 0$ genau das negative von seinem Integral über die rechte Hälfte mit $u > 0$ und diese Werte haben sich gegenseitig auf.

(c) Wir sehen sofort, dass $\operatorname{div}(\mathbf{K}) = 0$, somit ist

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}\, d\omega = \int_B \operatorname{div}(\mathbf{K})\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

wobei

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_3 \leq 1,\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3\}.$$

∂B besteht somit einerseits aus der Mantelfläche G und andererseits aus der Grundfläche $S = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ mit Normalenvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit ist

$$\begin{aligned}
\int_G \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}\, d\omega &= -\int_S \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}\, d\omega \\
&= -\int_S \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\omega \\
&= -\int_S x_2\, d\omega = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir widerum Symmetrie verwendet haben.