

13.1. Der Satz von Stokes

Seien $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$, $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \mid |x_3| \leq 1\}$ und $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

wie in Aufgabe 12.3. Nutzen Sie nun Stokes, um den Fluss durch die Oberfläche G zu berechnen.

Lösung:

Sei $\mathbf{K}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$ und betrachte die Gleichung $\text{rot}(\mathbf{g}) = \mathbf{K}$:

$$\text{rot}(\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_3} g_2 \\ \partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3 \\ \partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}$$

Diese Gleichungen hat viele Lösungen für \mathbf{g} welche durch Raten gefunden werden können, z.B.

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren den Einheitskreis $\{u^2 + v^2 = 1\}$ auf die übliche Art durch $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ und wenden anschliessend die Parametrisierung ψ wie in Aufgabe 12.3 an. Dies liefert die folgende Parametrisierung von ∂G

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \partial G, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung ist kompatibel mit der Orientierung welche der Satz von Stokes vorgibt und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dS &= \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t) \sin(t) + \cos^2(t) \sin(t)) \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wiederum benutzt, dass aus Symmetriegründen alle Integranden jeweils zu Null integrieren.

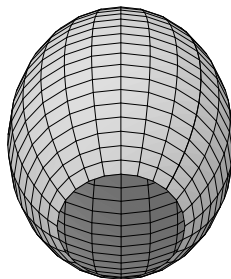
13.2. Integralsätze im \mathbb{R}^3

Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius $R > 0$ und Öffnungsdurchmesser $0 < d < 2R$ gemäss Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B mit der Geschwindigkeit

$$v = \operatorname{rot} F, \quad \text{wobei} \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den Fluss $\int_B v \cdot d\vec{\omega}$ durch die Ballonoberfläche B :

- (a) mit direkten Rechnungen;
- (b) mit Hilfe des Satzes von Gauss;
- (c) mit Hilfe des Satzes von Stokes.



Lösung:

Variante 1 (direkte Rechnung): Wir parametrisieren B , analog zur Sphäre, durch

$$(\phi, \theta) \mapsto T(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} x(\phi, \theta) \\ y(\phi, \theta) \\ z(\phi, \theta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ and $\theta \in [\theta_0, \frac{\pi}{2}]$, wobei der Winkel θ_0 der Winkel der "Abschneidehöhe" bezeichnet. Es muss gelten

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi + R^2 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \phi = R^2 \cos^2 \theta_0 = \frac{d^2}{4}$$

und es folgt

$$\cos^2 \theta_0 = \frac{d^2}{4R^2}.$$

Mit dieser Parametrisierung ist das vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} \times \frac{\partial T}{\partial \theta} d\phi d\theta = \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} d\phi d\theta \\ &= \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta \cos \phi \\ R^2 \cos^2 \theta \sin \phi \\ R^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d\phi d\theta \end{aligned}$$

tatsächlich nach aussen orientiert, wie verlangt. Es gilt

$$v = \operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des Vektorfeldes v durch die Oberfläche B des Ballons von innen nach aussen ist

$$\begin{aligned} \int_B v \cdot d\vec{\omega} &= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2R^2 \sin \theta \cos \theta d\phi d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 \left[-\cos^2 \theta \right]_{\theta=\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi R^2 \cos^2 \theta_0 = 2\pi R^2 \cdot \frac{d^2}{4R^2} = \frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

Variante 2 (Gauss): Sei D der kreisförmige “Deckel”, der den Ballon verschliesst, und sei G das Innere der durch $B \cup D$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Gaussche Integralsatz besagt:

$$\int_B v \cdot d\vec{\omega} + \int_D v \cdot d\vec{\omega} = \int_{B \cup D} v \cdot d\vec{\omega} = \int_G \operatorname{div} v d\mu = \int_G \operatorname{div} \operatorname{rot} F d\mu = 0.$$

Um den Fluss durch den “Deckel” D zu berechnen, betrachten wir die Parametrisierung

$$(\phi, r) \mapsto T(\phi, r) = \begin{pmatrix} x(\phi, r) \\ y(\phi, r) \\ z(\phi, r) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $r \in [0, \frac{d}{2}]$, wobei $z_0 = R \sin \theta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet. Deren vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} \times \frac{\partial T}{\partial r} d\phi dr = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi dr \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \sin^2 \phi - r \cos^2 \phi \end{pmatrix} d\phi dr = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\phi dr \end{aligned}$$

ist ebenfalls auf den Gesamtballon bezogen nach aussen gerichtet, wie es sein muss. Für den Fluss des Vektorfeldes v durch D erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_D v \cdot d\vec{\omega} &= \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\phi dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} -2r d\phi dr \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r dr = -4\pi \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-4\pi d^2}{8} = -\frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauss ist der Fluss des Vektorfeldes v durch D und den Ballon B gleich 0. Folglich erhalten wir für den Fluss durch den Ballon

$$\int_B v \cdot d\vec{\omega} = - \int_D v \cdot d\vec{\omega} = \frac{\pi d^2}{2}.$$

Variante 3 (Stokes): Da $v = \text{rot } F$ gilt, bietet sich auch der Satz von Stokes zur Berechnung des Flusses durch B an. Sei γ die geschlossene Kurve, die B berandet. Der Satz von Stokes besagt:

$$\int_B \text{rot } F \cdot d\vec{\omega} = \int_\gamma F \cdot dx.$$

Für γ wählen wir die Parametrisierung

$$t \mapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \cos t \\ \frac{d}{2} \sin t \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi)$, wobei $z_0 = R \sin \theta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet.

Diese Parametrisierung von γ umläuft die Ballonoberfläche im mathematisch positiven Sinn, d. h. wir werden am Ende der Rechnung das richtige Vorzeichen erhalten. Der Fluss berechnet sich folglich zu

$$\begin{aligned} \int_B v \cdot d\vec{\omega} &= \int_B \operatorname{rot} F \cdot d\vec{\omega} = \int_\gamma F \cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \sin t \\ \frac{d}{2} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \sin t \\ \frac{d}{2} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{4} dt = \frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

13.3. Satz von Gauss Berechne den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{K}(x, y, z) := (yz, zx, xy)$ von innen nach aussen durch den im ersten Oktanten gelegenen Teil der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Lösung:

Erster Lösungsweg mittels direkter Integration: Gesucht ist das Integral

$$\int_F \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{\omega},$$

wobei $F = \left\{ (x, y, z) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1; x, y, z \geq 0 \right\}$.

Die Punkte $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ liegen auf dem positiven Oktanten der Einheitssphäre. Wir wählen daher folgende Parametrisierung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\phi, \theta) \\ y(\phi, \theta) \\ z(\phi, \theta) \end{pmatrix} = \vec{f}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \cos \phi \\ b \cos \theta \sin \phi \\ c \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Damit erhalten wir das vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned}d\vec{\omega} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \theta} d\phi d\theta \\&= \begin{pmatrix} -a \cos \theta \sin \phi \\ b \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin \theta \cos \phi \\ -b \sin \theta \sin \phi \\ c \cos \theta \end{pmatrix} d\phi d\theta \\&= \begin{pmatrix} bc \cos^2 \theta \cos \phi \\ ac \cos^2 \theta \sin \phi \\ ab \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} d\phi d\theta.\end{aligned}$$

Dieser Vektor ist nach aussen gerichtet, da für $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die Komponenten nicht negativ sind. Der Fluss durch F ist

$$\begin{aligned}\int_F \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{\omega} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} bc \cos \theta \sin \theta \sin \phi \\ ac \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\ ab \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \cos^2 \theta \cos \phi \\ ac \cos^2 \theta \sin \phi \\ ab \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} d\phi d\theta \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2) \cos^3 \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta \\&= ((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \\&= ((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2) \cdot \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[-\frac{\cos^4 \theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{8}.\end{aligned}$$

Zweiter Lösungsweg über den Gaußschen Integralsatz, angewandt auf das Gebiet $G := \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1; x, y, z \geq 0\}$:

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{K} d\mu(x, y, z) = \int_{\partial G} \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\omega.$$

Die linke Seite ist 0, da

$$\mathbf{K} = (yz, xz, xy) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0.$$

Der Rand ∂G auf der rechten Seite des Gaußschen Satzes setzt sich aus vier Teilflächen zusammen: Eine ist die ellipsoidförmige Fläche F , durch die der Fluss $\int_F \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\omega$ gesucht ist; bei den anderen Teilflächen ist entweder $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$. Auf der Teilfläche F_1 mit $x = 0$ gilt $\mathbf{K} = (yz, 0, 0)$, und die nach aussen gerichtete Normale auf dieser Fläche ist $\vec{\mathbf{n}} = (-1, 0, 0)$. Also ist $\mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -yz$, und

$$\int_{F_1} \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\omega = \int_{y=0}^b \int_{z=0}^{c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}} -yz dz dy = \int_{y=0}^b -y \cdot c^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}{2} dy = -\frac{b^2 c^2}{8}.$$

Analog berechnet man den Fluss durch die anderen beiden Flächen mit $y = 0$ bzw. $z = 0$. Der Satz von Gauss impliziert also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{K} d\mu(x, y, z) = \int_F \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\omega - \frac{b^2 c^2}{8} - \frac{c^2 a^2}{8} - \frac{a^2 b^2}{8} \\ &\Rightarrow \int_F \mathbf{K} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\omega = \frac{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}{8}. \end{aligned}$$