ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi | 15. August 2019

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name: **Familienname, Vorname**
Legi-Nr.: Nummer
Studiengang: Fachrichtung

1

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.

- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.

- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.

- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.

- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.

- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

- Hinweis zur Schreibweise: In dieser Prüfung verlangt «beweisen Sie» einen mathematischen Beweis, wohingegen «zeigen Sie» mit einer Rechnung verifiziert werden kann. Somit ist «zeigen Sie» eigentlich einfacher als «berechnen Sie».

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

ist...

i) 1.

ii) 2.

iii) 4.

iv) ∞.

(b) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx$$

i) $\frac{1}{2} \log |1-x^2| + C$.

ii) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$+C.

iii) $\log |1-x^2| + C$.

iv) $\frac{2x}{(1-x^2)^2} + C$.

(c) Das Volumen das Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\, 6 \geq y \geq 0, 4 - x^2 \geq z \geq 0\}$$

ist...

i) 16.

ii) 32.

iii) 64.

iv) Das Volumen des Körpers ist nicht endlich.

(d) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$\nabla f(P) = (0,0)$$
$$Hess(f,P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium für den Konvergenzradius:

$$\frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} \to 4.$$

(b) Wir brauchen ein Partialbruchzerlegung, d.h. $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$ für zu bestimmende A und B. Man sieht schnell, dass $A = B = \frac{1}{2}$ gilt. Also haben wir

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|1+x| - \log|1-x|\right) + C.\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}Vol(K) = \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} 1\,dzdydx &= 6\int_0^2 (4-x^2)\,dx \\ &= 4x - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = 32.\end{aligned}$$

(d) Da die Determinante der Matrix gegeben ist durch 3 und der erste Eintrag positiv ist, ist die Matrix positiv definit, damit ist der Punkt ein lokales Minimum.

Aufgabe 2.[1 Punkt]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n+1}.$$

Lösung:

Die Reihe konvergiert nicht, denn $\frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} \neq 0$.

Aufgabe 3.[5 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-2^n}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$.

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\sqrt[n]{3^n}=3\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}. \tag{1}$$

Wir beachten nun, dass einerseits

$$\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\leq 1$$

für alle n und andererseits

$$\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\geq\sqrt[n]{1-\frac{2}{3}}$$

für alle n und letzteres konvergiert bekanntermassen gegen 1, somit ist

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

und die Aussage folgt

(b) Wir verwenden L'Hospital, da sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x\cos(x^2-1)}{1} = 2$$

<u>Alternative:</u> Wir setzen eine Taylorenwicklung von sin ein. Es ist $\sin(x^2-1) = x^2-1+o(x^2-1)$ für $x^2-1\to 0$. Dann ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+o(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = 2.$$

<u>Andere Alternative:</u> Wir nutzen die bekannte Tatsache $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Dazu müssen wir den Bruch zuerst mit $x+1$ erweitern, danach können wir $y = x^2-1$ verwenden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}}_{\to 1}(x+1) = 2.$$

Aufgabe 4.[3 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)\,dx.$$

Lösung: Wir verwenden im ersten Schritt partielle Integration, wobei wir den Term $\log(x^2+1)$ ableiten und 1 integrieren

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)\,dx &= x\log(x^2+1) - \int x\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= x\log(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx \\ &= x\log(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x) + C.\end{aligned}$$

Aufgabe 5.[6 Punkte]

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x>0 \\ \cos(x)-1 & x\le 0. \end{cases}$$

(a) Wo ist f stetig?

(b) Wo ist f differenzierbar?

(c) Wo ist f stetig differenzierbar?

Lösung: Beachte zuerst, dass f ausserhalb des Nullpunktes glatt (=unendlich oft differenzierbar) ist als Verknüpfung glatter Funktionen, wir müssen also nur 0 betrachten.

(a) f ist stetig bei 0, denn $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$, ebenso wie $\cos(x) - 1$. Für den ersten Grenzwert brauchen wir die Beschränktheit von $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) Beim Nullpunkt müssen wir mit der Definition der Ableitung arbeiten, um zu bestimmen, ob es differenzierbar ist oder nicht. Dazu berechnen wir den rechts- und den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim \frac{-\sin(x)}{1} = 0,$$

wobei wir in der ersten Rechnung wiederum die Beschränktheit von $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ verwendet haben und in der zweiten Rechnung L'Hospital oder Taylorentwicklung. Insgesamt sehen wir so, dass f bei 0 differenzierbar ist.

(Achtung bei dieser Teilaufgabe: Hier ist es nötig, mit der Definition der Ableitung zu rechnen, weil die Funktion differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar ist.)

(c) Dazu berechnen wir die Ableitung bei $x > 0$. Diese ist

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der erste Term hiervon konvergiert zwar gegen 0, der zweite konvergiert aber gar nicht (schwankt zwischen -1 und 1), somit ist die Funktion nicht stetig differenzierbar bei 0. (Die Ableitung für $x < 0$ würde gegen den Grenzwert bei 0 konvergieren, aber wenn eine Seite nicht konvergiert, wissen wir bereits, dass wir keine stetige Ableitung haben.)

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x}.$$

Lösung: Wir berechnen zuerst die homogene Lösung, d.h. die Lösung von $y''+y'-2y = 0$. Das charakteristische Polynom davon ist $\lambda^2+\lambda-2=0$, die Lösungen sind -2 und 1. Die homogene Lösung ist also

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x,$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Die partikuläre Lösung suchen wir mit einem Ansatz. Da die rechte Seite Teil der homogenen Lösung ist, ist ein guter Ansatz $y_p(x) = Axe^{-2x}$, A zu bestimmen. (Für einen funktionierenden Ansatz brauchen wir diesen Term auf jeden Fall, alle zusätzlichen Terme wie $+Be^{-2x}$ sind überflüssig, aber nicht falsch.) Wir haben

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} \\ y_p'' &= -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, ergibt sich

$$Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} - 2Axe^{-2x} = e^{-2x}.$$

Dies ist erfüllt, falls $-3A = 1$, also $A = -\frac{1}{3}$. Die Gesamtlösung ist also

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{3} x e^{-2x}.$$

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy(x-y+1)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Finden Sie eine Gerade G, so dass $f|_G$, die Einschränkung von f auf G, stetig ist.

(b) Finden Sie eine Gerade $\tilde{G}$, so dass $f|_{\tilde{G}}$ <u>nicht</u> stetig ist.

Lösung:

(a) Auf der Geraden $x = 0$ ist f konstant 0, damit insbesondere stetig. (Varianten: $y = 0$ oder $x = y - 1$ oder jede beliebige Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.)

(b) Auf allen anderen Geraden ist f nicht stetig. Beispiel: $x = y$. Dann ist $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ und dies konvergiert nicht gegen 0.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösung:

Im Inneren suchen wir die Punkte, wo $\nabla f = 0$, also

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \\ 4y &= 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt als ersten Kandidaten $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$. Wir parametrisieren den Rand mit $(\cos t, \sin t)$ und setzen ein

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t - \cos t = 1 + \sin^2 t - \cos t.$$

Die Ableitung nach t ergibt

$$g'(t) = 2\cos t \sin t + \sin t \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies ist erfüllt, wenn entweder $\sin t = 0$, also bei $P_2 = (1,0)$ und $P_3 = (-1,0)$, oder wenn $\cos t = -\frac{1}{2}$, also bei $P_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $P_5 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (es ist hier nicht nötig, die Gleichung $\cos t = -\frac{1}{2}$ zuerst nach t aufzulösen.)

Setzen wir die Kandidaten in die Funktion ein, sehen wir

$$\begin{aligned} f(P_1) &= -\frac{1}{4} \\ f(P_2) &= 0 \\ f(P_3) &= 2 \\ f(P_4) = f(P_5) &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Damit ist das globale Maximum bei P_4 und P_5 und das globale Minimum bei P_1.

Variante: Die Kandidaten auf dem Rand lassen sich auch mit Lagrangemultiplikatoren finden: Die Lagrangefunktion ist

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

das dazugehörige Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} 2x - 1 - 2\lambda x &= 0 \\ 4y - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich sofort die Fallunterscheidung $y = 0$ oder $\lambda = 2$ und dann die gleichen Punkte wie zuvor.

Weitere Variante: Die Randkurve kann in zwei Kurvenstücke aufgeteilt werden mit Parametrisierung

$$\gamma_\pm : x \mapsto (x, \pm\sqrt{1 - x^2}).$$

Einsetzen und ableiten ergibt einige der Kandidaten. Diese Methode erzeugt künstliche Eckpunkte, nämlich $(-1, 0)$ und $(1, 0)$, welche zusätzlich betrachtet werden müssen.

Aufgabe 9.[2 Punkte]

Berechnen Sie das Volumen von

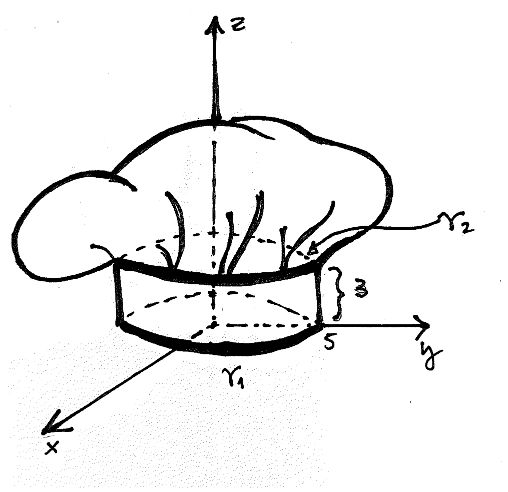
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1,\, x^2 + z^2 \leq \frac{1}{1 + y^2}\}.$$

Lösung: Das Volumen des Rotationskörpers ist

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \pi \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2}\, dy \\ &= \pi \arctan \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden Kochhut, betrachtet als glatte Oberfläche S im Raum.



Die Kurven γ_1 und γ_2 sind hierbei Kreise mit Mittelpunkten $(0,0,0)$ respektive $(0,0,3)$ und Radius 5.

Berechnen Sie

$$\int_S \mathbf{K} \cdot d\omega,$$

wobei $\mathbf{K} = (xze^{xyz}, -yze^{xyz}, 2x)$.

Lösung: Da keine Parametrisierung des Kochhutes gegeben ist, sind wir gezwungen, den Satz von Stokes zu verwenden, um das Ganze als Linienintegral über die Randkurve γ_1 zu berechnen. (Die Kurve γ_2 hat für die Berechnung dieser Aufgabe keine Bedeutung.) Wir suchen also ein Vektorfeld $\mathbf{F}$, so dass $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{K}$ ist. Es gibt unendlich viele $\mathbf{F}$, die dies erfüllen, eines ist beispielsweise

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 + y^2 \\ e^{xyz} \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen hier mit diesem weiter. Ein anderes $\mathbf{F}$ ergäbe einen analogen Lösungsweg und die selbe Lösung.

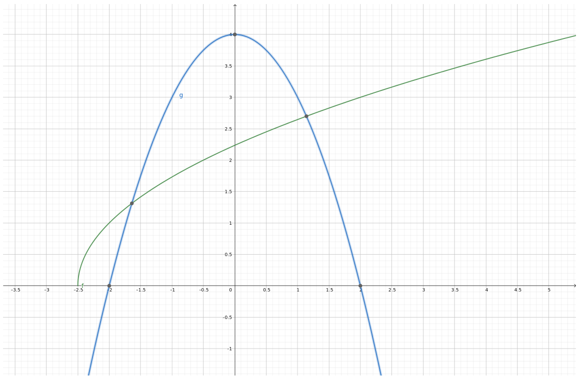
Wir parametrisieren die Kurve γ_1 durch $\varphi \mapsto (5\cos\varphi, 5\sin\varphi, 0)$ mit $\dot{\gamma}_1 = (-5\sin\varphi, 5\cos\varphi, 0)$. Mit Stokes erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{K} \cdot d\omega &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 5^2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5\sin\varphi \\ 5\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 5^3 \cos\varphi \, d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.[3 Punkte]

Skizzieren Sie die Graphen von $f(x) = \sqrt{2x+5}$ und $g(x) = 4 - x^2$ und beweisen Sie, dass es zwei Punkte ξ gibt mit $f(\xi) = g(\xi)$.

Lösung: Die Graphen sehen folgendermassen aus:



In der Skizze sind die zwei Schnittpunkte ersichtlich und es ist auch ersichtlich, wie man beweist, dass es tatsächlich zwei gibt: Wir betrachten die Funktion $f(x) - g(x)$ und werten diese aus an den Punkten $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$. Dort gilt $f(-2) - g(-2) > 0$, $f(0) - g(0) < 0$ und $f(2) - g(2) > 0$. Mit dem Zwischenwertsatz kriegen wir sofort, dass es dazwischen jeweils einen Punkt ξ geben muss mit $f(\xi) - g(\xi) = 0$.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = 2e^x + y(x - 1) - y^2$ um den Punkt $(0, 1)$ lokal nach $y(x)$ aufgelöst werden kann und berechnen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}(0)$.

Lösung: Zuerst beachten wir, dass $(0, 1)$ tatsächlich eine Lösung ist, d.h. $f(0, 1) = 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen müssen wir nun zeigen, dass $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \neq 0$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - 1) - 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -3 \neq 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass wir in einer Umgebung von $(0, 1)$ eine Lösung $y(x)$ finden können. Die Ableitung davon nach x ist gegeben durch

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{\partial_x f(0, 1)}{\partial_y f(0, 1)}$$

Mit $\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^x + y$, also $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 3$, folgt dann

$$\frac{dy}{dx}(0) = 1.$$

Aufgabe 13.[5 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen N gilt:

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n}.$$

Lösung: Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion
$N = 0$: Ist klar, da beide Summen leer sind (Alternativ: $N = 1$)
$N \to N+1$: Wir nehmen also an, dass die Aussage für N gelte und wollen die entsprechnende Aussage für $N+1$ herleiten. Dazu betrachten wir jeweils die Differenzen zwischen der Summe für N und jener für $N+1$. Auf der linken Seite ergibt dies

$$\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}.$$

Auf der rechten Seite haben wir

$$\frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{N+1}.$$

Mit einfachem Umformen sehen wir, dass dies das Selbe ist wie die Differenz auf der anderen Seite, damit haben wir die Aussage bewiesen.