Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi 10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2 \, dz = \int_0^1 (1 - z)^2 \, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\mathrm{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \stackrel{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \stackrel{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad\;\; y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \overset{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu=\frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x=y=-\frac{\mu}{2\lambda}=-\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z=-\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$ schliesslich erhalten wir $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq x\leq 1,\, y^2+z^2\leq e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y=s_z=0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x=\frac{1}{Vol}\pi\int_0^1 xe^x\,dx=\frac{\pi}{Vol}\left[xe^x-e^x\right]_0^1=\frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol=\pi\int_0^1 e^x\,dx=\pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x=\frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K}=(xy^2+2yz, yz^2, x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B=\{(x,y,0)\mid x^2+y^2\leq 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K)=\int_S K\cdot d\omega+\int_B K\cdot d\omega.$$

$\mathrm{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\int_V \mathrm{div}(K) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi$$
$$= 2\pi \frac{32}{5}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\int_B x^2$$
$$= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr$$
$$= -2\pi.$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi \frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi \frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}P_2(f,(1,1),(\Delta x,\Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y +\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2\\ &= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0, 1, 2, 3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}a_0 &= 0\\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10\\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\
-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi

10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\,dz = \int_0^1 (1-z)^2\,dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \stackrel{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \stackrel{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \qquad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-2\lambda x - \mu &= 0 \\
-2\lambda y - \mu &= 0 \\
1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
x + y + z &= 0.
\end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ y^2+z^2 \le e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\,dx = \pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2+2yz, yz^2, x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\mathrm{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{div}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi\frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(z^2+r^2)r\, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix}xy^2\\0\\x^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi) r\, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K\cdot d\omega = 2\pi\frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi\frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x,\Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0,1,2,3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\
-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi 10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\, dz = \int_0^1 (1-z)^2\, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}\left(y\log y - y\right) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \overset{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \overset{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \overset{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad\ \ y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \overset{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-2\lambda x - \mu &= 0\\
-2\lambda y - \mu &= 0\\
1 - 2\lambda z - \mu &= 0\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1\\
x + y + z &= 0.
\end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2 = 1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y^2+z^2 \leq e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\,dx = \pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\operatorname{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi\frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi\frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi\frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}P_2(f,(1,1),(\Delta x,\Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y +\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2\\ &= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0,1,2,3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}a_0 &= 0\\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10\\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 = -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. A. Iozzi 10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1-z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1-z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r) r \, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x+3z, -xz-y, y^2+2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3,-1,2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f,P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2 \, dz = \int_0^1 (1-z)^2 \, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x=0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2 + 1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}\,(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \stackrel{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \stackrel{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\, y^2+z^2 \le e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\, dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\, dx = \pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2+2yz, yz^2, x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\mathrm{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\int_V \mathrm{div}(K) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi$$
$$= 2\pi \frac{32}{5}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\int_B x^2$$
$$= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr$$
$$= -2\pi.$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi \frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi \frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y +\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2\\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0,1,2,3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10\\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. A. Iozzi

10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x+3z, -xz-y, y^2+2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\, dz = \int_0^1 (1-z)^2\, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \stackrel{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \stackrel{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ y^2+z^2 \le e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\,dx = \pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\mathrm{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{div}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi\frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi\frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0, 1, 2, 3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi

10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2 \, dz = \int_0^1 (1-z)^2 \, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \overset{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \overset{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \overset{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \qquad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x + y + z = 0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x + y + z = 0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\,dx = \pi(e - 1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z + 1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\mathrm{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{div}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi\frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(z^2+r^2)r\,drd\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix}xy^2\\0\\x^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi) r\,d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K\cdot d\omega = 2\pi\frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi\frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0, 1, 2, 3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi

10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1-z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1-z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\,dz = \int_0^1 (1-z)^2\,dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi \end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \overset{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \overset{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \overset{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x + y + z = 0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x + y + z = 0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x \, dx = \frac{\pi}{Vol} \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x \, dx = \pi(e - 1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e - 1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z + 1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\operatorname{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi \frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi \frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0,1,2,3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\stackrel{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. A. Iozzi

10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\, dz = \int_0^1 (1-z)^2\, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x=0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2 + 1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \overset{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \overset{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \overset{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \qquad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2 = 1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\, y^2+z^2 \le e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\, dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\, dx = \pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K\cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\mathrm{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{div}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi\frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi\frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0,1,2,3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi

10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f \colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\, dz = \int_0^1 (1-z)^2\, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\text{div}(K) = 2-1+2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x=0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2 + 1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \stackrel{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \stackrel{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \qquad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x+y+z=0$, kriegen wir sofort $\mu=\frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x=y=-\frac{\mu}{2\lambda}=-\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x+y+z=0$ erhalten wir $z=-\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$ schliesslich erhalten wir $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ y^2+z^2\le e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y=s_z=0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x=\frac{1}{Vol}\pi\int_0^1 xe^x\,dx=\frac{\pi}{Vol}\left[xe^x-e^x\right]_0^1=\frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol=\pi\int_0^1 e^x\,dx=\pi(e-1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x=\frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K}=(xy^2+2yz,yz^2,x^2(z+1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B=\{(x,y,0)\mid x^2+y^2\le 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K)=\int_S K\cdot d\omega+\int_B K\cdot d\omega.$$

$\operatorname{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi \frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi \frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x,\Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y +\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2\\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0, 1, 2, 3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10\\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2\\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1\\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi 10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2\, dz = \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x = 0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2+1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0\le x\le 2\pi\\ cx^2+d & x>2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \overset{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \overset{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \overset{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x, y, z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x + y + z = 0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x + y + z = 0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\, dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\, dx = \pi(e - 1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z + 1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\text{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \text{div}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (z^2 + r^2) r \, dr d\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K \cdot d\omega = 2\pi \frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi \frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0, 1, 2, 3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi 10. Februar 2020

Analysis I & II Lösung Basisprüfung
D-ITET

Name:
Legi-Nr.:
Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben]

Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Lösung. Sie kriegen pro Teilaufgabe
2 Punkte, wenn Sie die richtige (und nur die richtige) Lösung ankreuzen
0 Punkte, wenn Sie gar nichts ankreuzen
-1 Punkt, wenn Sie etwas Falsches ankreuzen.
Die Gesamtaufgabe ergibt in jedem Fall mindestens 0 Punkte.

(a) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$$

ist ...

i) 0.

ii) 1.

iii) 2.

iv) ∞.

(b) Sei $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Welches der folgenden Integrale ist <u>nicht</u> das selbe wie alle anderen?

i) $\int_B (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dxdy$.

ii) $\pi \int_0^1 (1 - z)\, dz$.

iii) $\pi \int_0^1 (1 - z)^2\, dz$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r\, dr d\varphi$.

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ durch die Oberfläche des Balls mit Radius 3, zentriert um den Punkt $(3, -1, 2)$.

i) -4π.

ii) 0.

iii) 4π.

iv) 108π.

(d) Sei $f \in C^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to R$. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, an welchem

$$Hess(f, P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

i) P ist ein lokales Maximum.

ii) P ist ein lokales Minimum.

iii) P ist ein Sattelpunkt.

iv) Dies lässt sich mit den gegebenen Daten nicht bestimmen.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Wurzelkriterium für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}}} = \log n \to \infty.$$

(b) Offensichtlich unterscheiden sich ii) und iii), wir müssen also nur überprüfen, welches davon mit den anderen übereinstimmt. Dazu nehmen wir iv). Wenn wir annehmen, dass wir dies nach Integration über z erhalten haben, dann ist $z = 1 - r$, also $r = 1 - z$. Um dies nun als Rotationskörper zu schreiben verwenden wir die Formel $Vol = \int_0^1 r(z)^2 \, dz = \int_0^1 (1-z)^2 \, dz$. Somit unterscheidet sich ii) von allen anderen Integralen.

Alternativ kann man einfach alle Integrale berechnen und überprüfen, welches sich von den anderen unterscheidet.

(c) Wir nutzen den Divergenzsatz und berechnen $\operatorname{div}(K) = 2 - 1 + 2 = 3$. Also ist der Fluss durch die Oberfläche genau dreimal das Volumen des Balles und damit 108π.

(d) Solange wir nicht wissen, dass der Punkt überhaupt ein kritischer ist, nützt das Wissen über die Hessematrix nichts. Tatsächlich haben wir also nicht genug Informationen.

Die korrekten Antworten sind also a)iv), b)ii), c)iv), d)iv)

Teilaufgabe d) gibt keinen Abzug bei Fehler

Aufgabe 2.[2 Punkte]

Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}.$$

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Vergleichskriterium, denn es gilt $e^{-2n} < n^{-2}$ und es ist bekannt, dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Alternativ funktioniert auch Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.[4 Punkte]

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}.$$

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch, um die Differenz der Wurzeln zu entfernen

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Hier kann man nun x kürzen und danach darf man einfach $x=0$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ kann man diese Aufgabe mit L'Hospital lösen.

(b) Wir verwenden L'Hospital zweimal, da beide Male Zähler und Nenner gegen 0 gehen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Alternative: Die Taylorentwicklung von e^x ist $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Einsetzen ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.[2 Punkte]

Berechnen Sie

$$\int \log(x^2+1)x\,dx.$$

Lösung:

Wir verwenden zuerst die Substitution $y = x^2 + 1$ mit $dy = 2xdx$ und danach partielle Integration (oder das Integral von log wird direkt hingeschrieben), am Ende folgt Rücksubstitution

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{1}{2}\int \log(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big(y\log y - \int 1\,dy\Big)\\ &= \frac{1}{2}(y\log y - y) + C = \frac{1}{2}\Big((x^2+1)\log(x^2+1) - (x^2+1)\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternative: Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(Man beachte, dass der Unterschied zu obiger Lösung in die Konstante fällt)

Aufgabe 5.[2 Punkte]

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} ax^2+b & x<0\\ \cos(x) & 0 \le x \le 2\pi\\ cx^2+d & x > 2\pi \end{cases}\end{aligned}$$

(a) Für welche Konstanten ist f stetig?

(b) Kann man die Konstanten so wählen, dass f auch stetig differenzierbar ist?

Lösung: Wir beachten zuerst, dass f ausserhalb von $\{0, 2\pi\}$ glatt ist, wir also nur diese beiden Punkte betrachten müssen.

(a) Stetigkeit bei 0 bedeutet

$$a0^2 + b \stackrel{!}{=} \cos(0) \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Stetigkeit bei 2π bedeutet

$$c(2\pi)^2 + d \stackrel{!}{=} \cos(2\pi) = 1.$$

Insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $d = 1 - 4\pi^2 c$.

(b) Da wir nur stetig differenzierbar suchen (und nicht nur differenzierbar), reicht es, die Ableitungen auf den Teilabschnitten zu berechnen und deren Stetigkeit zu verlangen. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ -\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ 2cx & x > 2\pi \end{cases}$$

Stetigkeit bei 0 ergibt keine weitere Bedingung an a und b.
Stetigkeit bei 2π ergibt

$$2c \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} -\sin(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Da die Funktion insbesondere stetig sein muss, ergibt sich insgesamt also $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Aufgabe 6.[3 Punkte]

Finden Sie die Lösung von

$$\begin{cases} xy' + 3y = 0 \\ \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Die Gleichung ist separierbar und wir können rechnen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x} \\ \log(y) &= -3\log x + C \\ y &= B\frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei $B = e^C$ eine Umbenennung der Konstante ist. Setzen wir nun den Anfangswert ein, ergibt sich $B = y(1) \stackrel{!}{=} 2$ und damit

$$y(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Alternativ lässt sich die Aufgabe mit einem Ansatz der Art $y(x) = Ce^{\alpha x}$ lösen. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $\alpha = -3$.

Aufgabe 7.[2 Punkte]

Gegeben sei die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Lässt sich die Funktion stetig zu $(0,0)$ erweitern?

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten, dann ist f gegeben durch

$$\frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Da $(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$ beschränkt ist, gilt für $r \to 0$, dass die Funktion gegen 0 konvergiert. Also kann man die Funktion erweitern, indem man definiert $f(0,0) = 0$.

Aufgabe 8.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y,z) = z$ auf der Kurve, welche gegeben ist durch den Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 0$.

Lösung:

Wir brauchen Lagrangemultiplikatoren. Die Lagrangefunktion ist

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z).$$

Ableiten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2\lambda y - \mu &= 0 \\ 1 - 2\lambda z - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Wir beachten zuerst, dass weder λ noch μ 0 sein dürfen. Addieren wir die ersten drei Gleichungen und verwenden $x + y + z = 0$, kriegen wir sofort $\mu = \frac{1}{3}$. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir dann $x = y = -\frac{\mu}{2\lambda} = -\frac{1}{6\lambda}$. Wiederum mit $x + y + z = 0$ erhalten wir $z = -\frac{1}{3\lambda}$. Mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ schliesslich erhalten wir $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Uns interessiert nur der z-Wert, dieser ist dann $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ und dies sind dann auch Minimum respektive Maximum der Funktion.

Aufgabe 9.[3 Punkte]

Berechnen Sie den Schwerpunkt von

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq e^x\}.$$

Lösung: Aufgrund der Symmetrie des Rotationskörpers gilt für den Schwerpunkt $s_y = s_z = 0$. Für die x-Komponente gilt

$$s_x = \frac{1}{Vol}\pi \int_0^1 xe^x\,dx = \frac{\pi}{Vol}\left[xe^x - e^x\right]_0^1 = \frac{\pi}{Vol},$$

wobei wir partielle Integration verwendet haben zum Lösen des Integrals. Das Volumen ist gegeben durch

$$Vol = \pi \int_0^1 e^x\,dx = \pi(e - 1).$$

Somit ist der Schwerpunkt

$$s_x = \frac{1}{e-1}.$$

Aufgabe 10.[5 Punkte]

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{K} = (xy^2 + 2yz, yz^2, x^2(z + 1))$ durch die Oberfläche S gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Lösung: Variante 1: Unter Verwendung des Divergenzsatzes. Dazu schliessen wir den Körper ab, indem wir zusätzlich $B = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ als Boden dazunehmen und dann als Volumen V die Halbkugel betrachten. Dann ist

$$\int_V \operatorname{div}(K) = \int_S K \cdot d\omega + \int_B K \cdot d\omega.$$

$\operatorname{div}(K) = x^2 + y^2 + z^2$, weshalb mit Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div}(K) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2 r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi\frac{32}{5}\end{aligned}$$

(Alternativ mit Zylinderkoordinaten: $\int_V div(K) = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(z^2+r^2)r\,drd\vartheta dz.$)

Für den Fluss durch die Bodenfläche nutzen wir, dass der Normalenvektor gegeben ist durch $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_B \begin{pmatrix}xy^2\\0\\x^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} &= -\int_B x^2 \\ &= -\int_0^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi) r \, d\varphi dr \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Das Resultat ist also

$$\int_S K\cdot d\omega = 2\pi\frac{32}{5} + 2\pi = 2\pi\frac{37}{5}.$$

Variante 2: Direkte Rechnung.

Aufgabe 11.[2 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|.$$

Lösung: Die Aussage folgt, indem wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \sin x$ anwenden, auf dem Intervall $[u, v]$ (unter der Annahme $u \leq v$). Dieser besagt, dass es ein $c \in [u, v]$ gibt mit

$$f'(c) = \frac{\sin u - \sin v}{u - v}.$$

Beachten wir nun, dass $f'(c) = \cos(c) \in [-1, 1]$, folgt die Aussage sofort.

Aufgabe 12.[2 Punkte]

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ um den Punkt $(1,1)$.

Lösung: Wir berechnen zuerst alle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_2(f,(1,1),(\Delta x, \Delta y)) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\Delta y + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(\Delta y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Delta x - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{4}(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.[6 Punkte]

Gesucht ist eine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2,$$

welche für alle natürlichen n gültig ist. Verwenden Sie als Ansatz ein Polynom dritten Grades, $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, und bestimmen Sie die a_i. Beweisen Sie danach, dass das so gefundene Polynom tatsächlich der Summe entspricht für alle n.

Lösung: Wir nehmen den Ansatz aus der Aufgabenstellung und setzen dort $n = 0, 1, 2, 3$ ein, um ein Gleichungssystem für die a_i zu kriegen. Dieses lautet

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 10 \\
3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 35.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{3}$.

Um nun zu beweisen, dass dies tatsächlich eine gültige Formel für alle n ist, verwenden wir vollständige Induktion. Die Verankerung haben wir bereits, es fehlt der Schritt $n \to n+1$. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{IV}{=} \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}n^3\right) + 4n^2 + 4n + 1 \\ -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3}(n+1)^3 &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + 4n + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke sieht man sofort, dass sie gleich sind. Somit ist die Aussage bewiesen.