1.1. Die Produktmetrik Sei X eine Menge. Eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung $(x, y) \mapsto d(x, y)$, die die Eigenschaften

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. *Symmetrie:* Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Dreiecksungleichung:* Für alle $x, y, z \in X$ gilt
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\,.$$

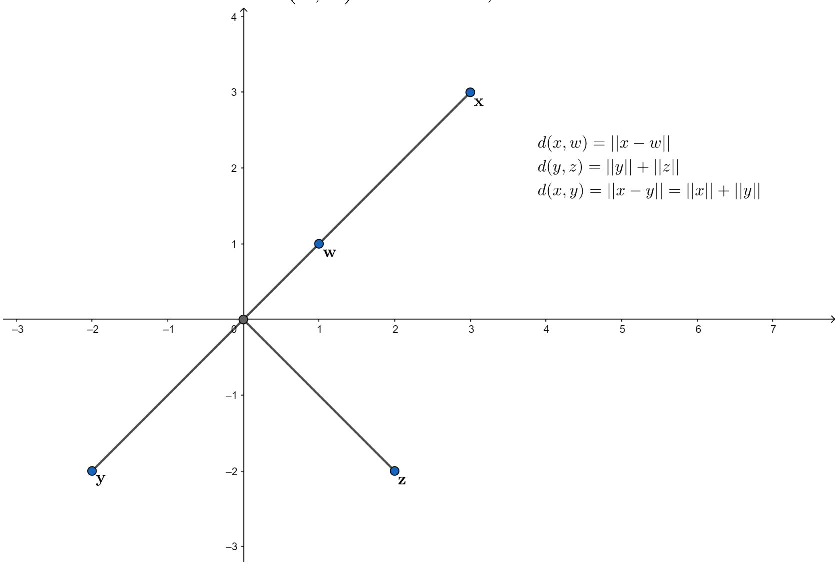
erfüllt.

Es seien jetzt (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf dem Produkt $X := X_1 \times X_2$ werde eine Metrik definiert durch
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$
für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Man zeige, dass $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die Axiome einer Metrik erfüllt.

1.2. Französische Eisenbahnmetrik Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der *Französischen Eisenbahnmetrik*: Für $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| & \text{wenn } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ und } (0,0) \text{ auf derselben Geraden liegen,} \\ ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ gilt $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Beachte, dass die beiden Definitionen übereinstimmen, falls sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zwar auf einer Gerade durch $(0, 0)$ befinden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunkts.



(a) Verifiziere, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei Y ein metrischer Raum (hier ist $Y = \mathbb{R}^2$). Wir sagen, dass zwei Metriken $d_1, d_2 \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ äquivalent sind, falls sie die gleichen konvergenten Folgen haben, d.h. wenn für alle Folgen $(y_n) \subset Y$ und $y \in Y$ gilt: $\lim_{n\to\infty} d_1(y_n, y) = 0$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} d_2(y_n, y) = 0$. Zeige, dass das oben definierte d nicht äquivalent ist zur euklidschen Metrik $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Betrachte dazu die Folge $\mathbf{x}_n = (2^{-n}, 1)$ und den Punkt $\mathbf{x} = (0, 1)$.

1.3. Stetigkeit

Wir betrachten die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} |y/x^2| \cdot 2^{-|y/x^2|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

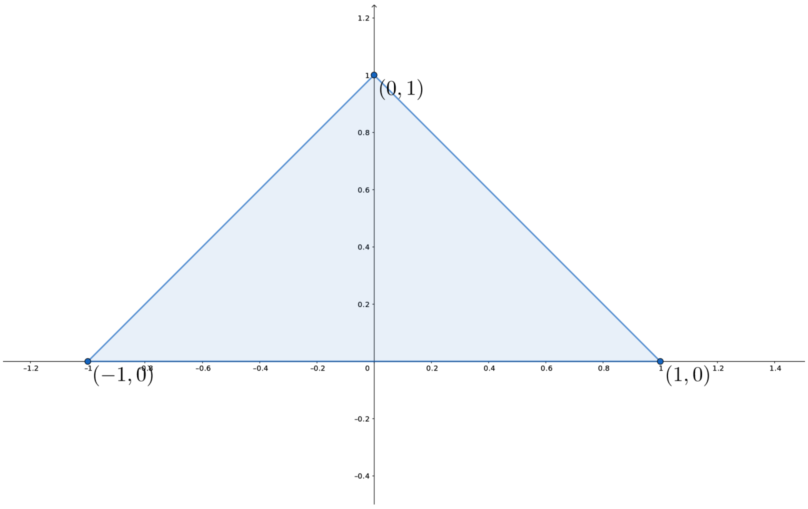
(a) Zeige, dass die Einschränkung $f|_G$ auf jede Gerade G durch den Nullpunkt stetig auf G ist.

(b) Zeige, dass f trotzdem nicht stetig im Nullpunkt ist. Betrachte dazu den Pfad entlang $y = x^2$.

Diese Aufgabe zeigt, dass Stetigkeit in mehreren Dimensionen nicht so einfach zu zeigen ist wie in einer Dimension: Wir müssen stets alle möglichen Pfade zu einem Punkt betrachten. In einer Dimension haben wir mit den Pfaden aus positiver und aus negativer Richtung bereits alle, die wir brauchen. In mehreren Dimensionen reichen die Pfade entlang Geraden aber nicht aus, da sich die Funktion entlang gekrümmter Pfade noch immer unstetig verhalten kann, wie diese Beispiel zeigt.

1.4. Niveaumengen/Höhenlinien Bestimme und skizziere die Niveaumengen/Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ zu den Werten $c = 1, \frac{1}{2}, 0$.

1.5. x-einfach, y-einfach Beschreibe das folgende Dreieck als x-einfachen Bereich respektive als y-einfachen Bereich.



1.6. Partielle Ableitungen Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x, y) = x$;

(b) $f(x, y) = e^{xy}$;

(c) $f(x, y) = x^y$;

(d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;

(e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$;

(f) $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

1.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $Q := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

i) offen

ii) abgeschlossen

iii) keine der vorherigen Antworten ist korrekt

(b) Sei $Q := (0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

i) offen

ii) abgeschlossen

iii) keine der vorherigen Antworten ist korrekt