2.1. y-einfacher/ x-einfacher Bereich Wir betrachten die Menge

$$E := \{(x, y) : x > 0,\ |y| < x,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

(a) Zeichnen Sie das Bild der Menge.

(b) Schreiben Sie diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ als y-einfachen Bereich, falls möglich.

(c) Schreiben Sie diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ als x-einfachen Bereich, falls möglich.

2.2. Differenzierbarkeit I. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = 0 \\ \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall differenzierbar ist.

2.3. Differenzierbarkeit II. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass im Ursprung die Richtungsableitung

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\mathbf{e}) - f(\mathbf{0})}{t}$$

für jede Richtung $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ (mit $||\mathbf{e}|| = 1$) existiert.

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht notwendigerweise differenzierbar ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{falls } x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2} & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

2.4. Die Kettenregel Sei $x(t) = \cos \pi t$ und $y(t)$ die Stammfunktion von e^{-t^2}, die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt} \left(f\left(x(t), y(t) \right) \right) \Big|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f\left(x(t), y(t) \right)$ im Punkt $t = 1$.

2.5. Vertauschung von Ableitung und Integral Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t)$$

sei gegeben durch

$$F(t) = \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x(x+1)}\,dx.$$

Berechnen Sie $\dot{F}(0)$.

2.6. Tangentialebene Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} &f\colon \Omega \to \mathbb{R} \\ &(x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

wobei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

(a) Berechne die Tangentialebene des Graphen an einer Stelle $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

(b) Skizziere die Situation für $(x_0,y_0) = (0,0)$ respektive $(x_0,y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $f(x,y) = (x+y)^2$. Die Ableitung von f im Punkt (x,y) in Richtung $v = (1,-1)$ ist

i) $2x$

ii) $\sqrt{2}(x+y)$

iii) 0

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0,y_0) partiell nach x differenzierbar. Welcher Ausdruck ist im allgemeinen *nicht äquivalent zu den anderen?* Hier ist $D_{(e_1,e_2)}f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0,y_0)+h(e_1,e_2)-f(x_0,y_0)}{h}$.

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

ii) $D_{(1,0)}f(x_0,y_0)$

iii) $D_{(-1,0)}f(x_0,y_0)$

iv) $-D_{(-1,0)}f(x_0,y_0)$

(c) Wie lautet der Gradient der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto xy$?

i) $\nabla f(x,y) = (x,y)$

ii) $\nabla f(x,y) = x + y$

iii) $\nabla f(x,y) = y$

iv) $\nabla f(x,y) = (0,0)$

v) $\nabla f(x,y) = (y,x)$

(d) Für je zwei partiell differenzierbare Funktionen $f,\, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

i) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$

ii) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$

iii) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$, aber nur wenn f und g total differenzierbar sind

(e) Die Ableitung von $f(x,y) = x - \sin(xy) - \frac{\pi}{4}$ im Punkt $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ in Richtung von $u = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ist

i) $\frac{1}{2}$

ii) $\frac{\pi}{2}$

iii) 1

iv) 0

(f) Die Ableitung von $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ im Punkt $(1,2)$ in Richtung der Gerade, welche einen $45°$-Winkel mit der x-Achse bildet, ist

i) 1

ii) π

iii) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

iv) $\frac{\pi}{2}$