3.1. Implizite Funktion und ihre Ableitung

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(x, y) = 4(x + y) - x^2 + 2y \arctan(y) - \log(y^2 + 1)$$

(a) Begründen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ überall lokal der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist.

(b) Geben Sie die Ableitung y' an.

(c) Bestimmen Sie $y''(x)$ für die kritischen Punkte x von y.

3.2. y-einfache und x-einfache Bereiche Wir betrachten die Menge

$$E := \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, -e^x \leq y \leq e^x\}.$$

Schreiben Sie diese Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ als x-einfachen Bereich, falls möglich.

3.3. Implizite Funktion II Sei $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2(1 - x^2) - y^2 = 0\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge L.

(b) Für welche Punkte $(x_0, y_0) \in L$ lässt sich die Menge L lokal (d.h. in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) \in L$) als Graph einer Funktion $y = \phi(x)$ darstellen?

3.4. Taylor-Entwicklung

Man berechne die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades der folgenden Funktionen um den angegebenen Punkt und approximiere damit den Funktionswert an den angegebenen Approximationspunkten. Vergleiche das Resultat mit den tatsächlichen Funktionswerten.

(a) $f(x, y) = e^x \sin y$ um $P = (0, \pi/2)$.
Approximationspunkt: $(0, \pi/2 + 1/4)$.

(b) $f(x, y) = e^{x/y}$ um $P = (1, 1)$,
Approximationspunkt: $(5/4, 1/2)$.

(c) Wie genau ist die Approximation der linearen Taylorentwicklung aus a) auf dem Ball $B_{1/4}(0, \pi/2)$? Bestimme eine Schranke für den entstehenden Fehler.

(d) Bestimme einen Radius r, so dass der Approximationsfehler der linearen Taylorentwicklung auf dem Ball $B_r(0, \pi/2)$ höchstens 10^{-4} beträgt.

3.5. Kritische Punkte Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf kritische Punkte und Extrema.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

(c) $f(x, y) = (x - 1)e^{-(x^2+y^2)}$

(d) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$