

4.1. Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 7x - 2y$$

auf dem Bereich $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 3\}$.

Hinweis: Figur!

4.2. Parametrisierung einer Fläche I

Sei $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{pmatrix}, \quad (1)$$

- (a) Fixiere $u = 0$ und skizziere die Kurve $v \mapsto \mathbf{x}(0, v)$.
- (b) Wiederhole dies mit $u = \frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi/2$.
- (c) Fixiere nun $v = 0$ und skizziere die Kurve $u \mapsto \mathbf{x}(u, 0)$.
- (d) Wiederhole dies mit $v = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Dies ist also offensichtlich eine Parametrisierung des Zylinders. Beachte, dass man den Zylinder auch schreiben kann als die Niveaumenge der Funktion $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ zum Niveau $c = 1$.

4.3. Parametrisierung einer Fläche II

Die Abbildung $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} [2 + \cos(v)] \cos(u) \\ [2 + \cos(v)] \sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

beschreibt eine Fläche F im Raum.

- (a) Skizzieren Sie ein Bild der Fläche F mittels einiger Koordinatenlinien.
- (b) Zeigen Sie, dass die so definierte Fläche genau die Niveaumenge der Funktion $g(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2$ zum Niveau $c = 1$ ist.

4.4. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren I

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren das achsenparallele Rechteck größter Fläche, das sich in die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

einbeschreiben läßt.

Berechnen Sie die Fläche und vergleichen Sie mit der Fläche der Ellipse.

4.5. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren II

Finde das Maximum der Funktion $f(x, y, z) := x$ auf der durch die Gleichungen $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ definierten Kurve mit

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3.$$

Benutze dazu die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Hinweis: Es ist nicht nötig, die Kurve selbst zu beschreiben oder zu parametrisieren.