

5.1. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x - y - z$$

auf der Schnittkurve des elliptischen Zylinders $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ mit der Ebene $3x - 4z = 0$.

5.2. Die Jacobi-Determinante

Die Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} := \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

für eine geeignete offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$y_i := \frac{x_i}{1 - x_1 - x_2 - x_3}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Berechne die Jacobi-Determinante $J_f(x)$.

5.3. Die Jacobi-Matrix II

Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + e^y \\ x + y \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v, w) \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ w \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \beta \circ \alpha$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von γ .

5.4. Die Kettenregel

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

sowie die Projektion auf die (y, z) -Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne die Funktionalmatrix von $\Pi \circ \mathbf{f}$ mittels expliziter Berechnung von $\Pi \circ \mathbf{f}$.
- (b) Berechne nochmals diese Funktionalmatrix mit Hilfe der (mehrdimensionalen) Kettenregel.
- (c) In welchen Punkten (u, v) ist $\Pi \circ \mathbf{f}$ nicht regulär?