

6.1. Mehrfache Integrale I

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy$,

(b) $\int_0^1 \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy$,

(c) $\int_1^3 \int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2) dx dy$,

(d) $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x) \sin^2(y) dx dy$,

(e) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dx dy$,

(f) $\int_0^1 \int_0^1 (e^x + e^y) dy dx$.

6.2. Die Jacobi-Determinante

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

- (a) Erkläre die Bedeutung von f und beschreibe das Bild für festes r .
- (b) Berechne die Jacobimatrix von f .
- (c) Berechne die Jacobideterminante.

6.3. x -einfacher Bereich

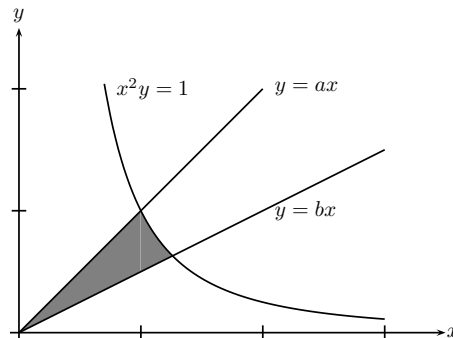
Seien $a, b > 0$ mit $a > b$. Wir betrachten die Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, bx < y < ax, x^2y < 1\}.$$

Schreiben Sie E als x -einfachen Bereich.

6.4. Mehrfaches Integral II

Berechne das Integral $\int_B xy \, dx \, dy$ für den schraffierten Bereich B (wobei $a > b > 0$).



6.5. Mehrfache Integrale III

Berechne die folgenden Doppelintegrale:

(a) $\int_0^2 \int_y^{2y} (x + e^y) \, dx \, dy,$

(b) $\int_1^2 \int_{\sqrt[3]{y}}^y x^2 y^3 \, dx \, dy,$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi^2 - y^2} \cos y \, dx \, dy.$