### 7.1. Mehrfache Integrale I

**(a)** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

**(b)** Sei $A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|+|y| < 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{A_1} x^2\,dx\,dy.$$

**(c)** Sei $A_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{A_2} xyz\,dx\,dy\,dz.$$

**(d)** Sei $A_3 := \{(x,y) \,|\, |x| \leq |y| \leq 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{A_3} e^{y^2}\,dx\,dy.$$

**(e)** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,dx\,dy.$$

### 7.2. Das Volumen

*Erinnerung*: Das Volumen eines Körpers $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx_1 \ldots dx_n$.

Berechne das Volumen, welches vom elliptischen Zylinder

$$9x^2 + 4y^2 = 36\,,\ z \geq 0$$

und den Ebenen

$$-y + z = 3$$

und

$$z = 0$$

eingeschlossen wird.

### 7.3. Schwerpunkt

Der Schwerpunkt eines messbaren Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$ mit positiven Volumen $\mathrm{vol}(K) > 0$ ist definiert als der Punkt $S := (s_x, s_y, s_z)$ mit den Koordinaten

$$s_x := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x \, dxdydz \qquad s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K y \, dxdydz, \qquad s_z := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K z \, dxdydz$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Simplex

$$\Delta^3 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1 \right\}.$$

### 7.4. Mehrfache Integrale II

Vertausche in den folgenden Integralen die Integrationsreihenfolge:

**(a)** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left( \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$ ,

**(b)** $\displaystyle\int_{0}^{2} \left( \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y) \, dx \right) dy$ .

### 7.5. Mehrfache Integrale III

Berechnen Sie das Integral

$$\int_E (x + y - z) \, dx \, dy \, dz \,,$$

wobei

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 2 \right\}$$

ist.