8.1. Das Volumen I

Berechne das Volumen, welches vom Zylinder

$$x^2 + y^2 = 1\,,\ z \geq 0$$

und der Ebene

$$x + z = 1$$

eingeschlossen wird.

8.2. Rotationskörper I

(a) Sei $z_0 > 0$. Berechne das Volumen des Paraboloiden

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq z_0,\, x^2 + y^2 \leq z\}$$

(b) Theoretische Überlegung: Kann man mit der selben Methode auch das Volumen eines schräg angeschnittenen Paraboloiden der Form

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z\} \cap \{(x, y, z) \mid z \leq 1 + y\}$$

berechnen?

8.3. Variablentransformation I

(a) Bestimmen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ den Flächeninhalt des Gebietes

$$A_1 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq ax + by \leq 1,\ 0 \leq cx + dy \leq 1\Big\}\,.$$

(b) Bestimmen Sie für $0 < a < b$ und $0 < c < d$ den Flächeninhalt des Gebietes

$$A_2 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq ye^{-x} \leq b,\ c \leq ye^{x} \leq d\Big\}\,.$$

(c) Berechnen Sie für $A_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq 2x - 3y \leq 4\}$ das Integral

$$\int_{A_3} \sqrt{x + y}\, dxdy.$$

8.4. Rotationskörper II

Wir betrachten den Rotationskörper $K \subseteq \mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ um die x-Achse rotiert.

(a) Schreibe K als Menge auf und skizziere den Körper.

(b) Berechne das Volumen von K.

8.5. Der Schwerpunkt

Wir betrachten den Körper

$$\Omega := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt von Ω.

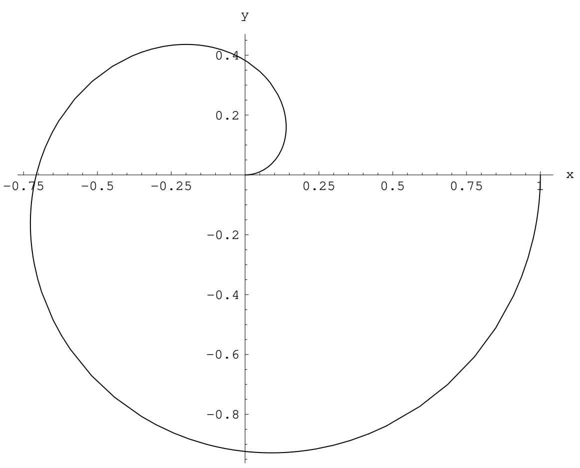
8.6. Die Gesamtmasse

Erinnerung: Für einen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Dichte ρ ist die Gesamtmasse gegeben durch $\int_K \rho(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$.

Sei B der Tetraeder, welcher von dem Koordinaten Ebenen und dem Ebene $x+y+z = 2$ berandet ist. Berechnen Sie die Gesamtmasse von B bezüglich der Dichte $\rho(x, y, z) = y^2$.

8.7. Variablentransformation II

In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\varphi \mapsto (\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\cos(\varphi), \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\sin(\varphi))$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, begrenzt.



Man berechne das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

8.8. Das Volumen II

Berechne das Volumen, welches vom Paraboloid

$$z = x^2 + 2y^2$$

und der Ebene

$$2x - 8y + z = 7$$

eingeschlossen wird.

8.9. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wir betrachten

$$K = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x + y \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\right\}.$$

Das Volumen von K ist...

i) 1.

ii) $\frac{2}{3}$.

iii) 2.

iv) π.

(b) Wir betrachten

$$K = \left\{(x, y, z) : 1 \leq z \leq e,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \log z\right\}.$$

Das Volumen von K ist

$$V(K) = \int_1^e \left(\int_{A(z)} dxdy\right) dz$$

wobei

$$A(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \log^2 z\}$$

ist. Sei zuletzt

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Dann kann man auch $V(K)$ schreiben als

i) $\int_B \left(e - e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy$.

ii) $\int_B e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

iii) $\int_0^1 \int_0^1 e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (e - e^r)\, r\, drd\phi$.

(c) Wir betrachten

$$K = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le 1,\ z \ge x^2 + y^2\right\}.$$

Sei

$$B_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 < r^2\}, \quad r > 0.$$

Dann gilt $V(K) =$

i) $\int_0^1 \left(\int_{B_z} dxdy\right) dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy\right) dx.$

ii) $\int_0^1 \left(\int_{B_{z^2}} dxdy\right) dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy\right) dx.$

iii) $\int_0^1 \left(\int_{B_{\sqrt{z}}} dxdy\right) dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy\right) dx.$