9.1. Der Zykloidenbogen

Sei $a > 0$. Ein Zykloidenbogen lässt sich folgendermassen parametrisieren:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Berechne die Länge dieser Kurve.

9.2. Linienintegrale I

Berechne die folgenden Wegintegrale im $\mathbb{R}^2$:

(a) $\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, wobei γ die Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(-1,1)$ zum Punkt $(1,1)$ durchläuft.

(b) $\int_\gamma xy^2\,dy$, wobei γ den Halbkreis $\{(x,y) : x^2+y^2 = 4, y \geq 0\}$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(c) $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, wobei γ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0)$ und $(0,1)$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

9.3. Linienintegrale II

Berechne das Linienintegral $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$ des Vektorfelds $\mathbf{K}$ längs der Kurve γ in den folgenden Fällen:

(a) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ -5z \\ 10x \end{pmatrix}$ und $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ für $t \in [1,2]$;

(b) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ -2y^2 \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0,2\pi]$;

(c) $\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+z \\ -2x^2+y \\ e^z \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0,2\pi]$.

9.4. Das Potential

(a) Das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (y^2+5, 2xy-8)$ ist konservativ. Berechne ein Potential, wie in Satz 3.12.

(b) Für das selbe Vektorfeld, berechne ein Potential mit folgender Methode: Sei $f(x,y)$ das noch unbekannte Potential. Es muss also gelten $\nabla f = \mathbf{K}$. Schreibe diese Gleichungen explizit hin und versuche sie zu lösen, indem du nach x respektive y integrierst.

Hinweis: Wenn man eine von x und y abhängige Funktion nach y integriert, dann ist die dabei entstehende Integrationskonstante eine von x abhängige Funktion und umgekehrt.

(c) Vergleiche die Lösungen von (a) und (b).

(d) Betrachte nun das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (x^2 - 2y^3, x + 5y)$ und versuche, die Methode von (b) anzuwenden. Was geschieht?

(e) Was würde geschehen, wenn man die Methode zur Bestimmung eines Potentials von Satz 3.12 auf dieses Vektorfeld anwendet?

9.5. Online-Aufgaben

(a) Welche der folgenden Kurven ist die längste?

i) Der Graph der Funktion $g_1\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2$.

ii) Der Graph der Funktion $g_2\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3$.

iii) Der Graph der Funktion $g_3\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3}{2}x^4$.

(b) Die Länge des Graphs der Funktion

$$[a,b] \ni x \overset{f}{\mapsto} f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ist...

i) $b - a$.

ii) $e^b - e^a$.

iii) $\frac{e^b - e^{-b} - e^a + e^{-a}}{2}$.

(c) Die Länge der Kurve

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni t \overset{f}{\mapsto} f(t) = \left(\frac{1}{4}\cos(2t), \cos^3 t, \sin^3 t\right)$$

ist...

i) $\sqrt{10}$

ii) 1.

iii) 2.

iv) π.

(d) Welche der folgenden Funktionen ist ein Potential des Vektorfeldes $\mathbf{K} = (2x + \cos x \cos y, 1 - \sin x \sin y)$?

i) $f(x, y) = 2x + \cos x \cos y + 1 - \sin x \sin y$

ii) $f(x, y) = x^2 + y + \sin x \cos y$

iii) $f(x, y) = 2x^2 + 2y + 2 \sin x \cos y$

(e) Das Linienintegral des Vektorfeldes $\mathbf{K}(x, y) = (x^2 y, -x^3)$ entlang des im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreises $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist...

i) 0

ii) π

iii) $-\pi$