10.1. Satz von Green I

Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe des Satzes von Green:

(a) $I_a := \int_{\partial B} \left[xy\,dx + x^2\,dy \right]$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^{2/3} \right\}$

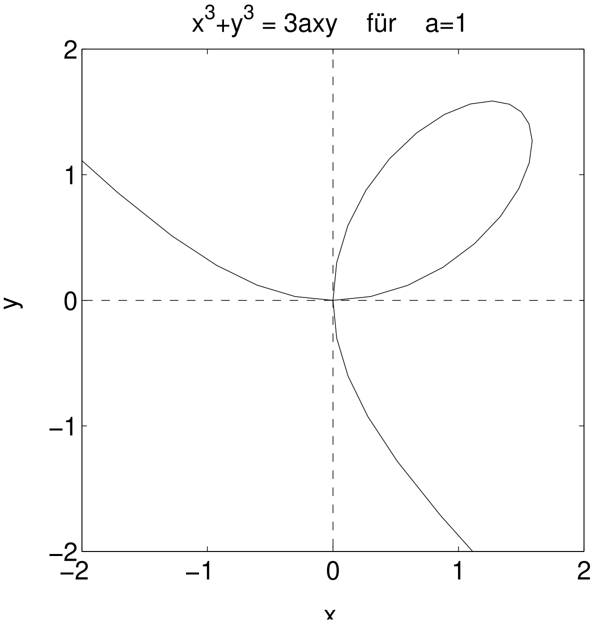
(b) $I_b := \int_{\partial B} [\, y\,dx + \sin(x)\,dy\,]$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq y \leq \cos(x) \right\}$

10.2. Satz von Green II

Es sei $a > 0$ ein Parameter. Betrachte das kartesische Blatt, welches durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

gegeben ist.



(a) Zeige mithilfe des Satzes der impliziten Funktionen, wo die Kurve lokal als Graph einer Funktion dargestellt werden kann.

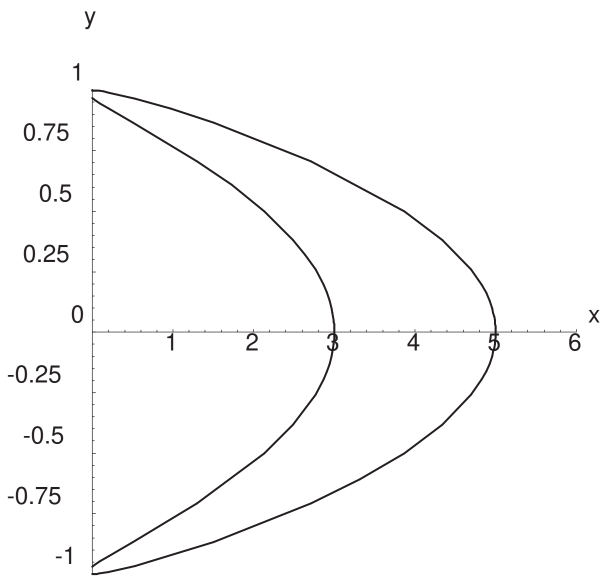
(b) Bestimme den Flächeninhalt der geschlossenen Schleife.

Hinweis: Finde eine Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ der Kurve durch den Ansatz $y = tx$. Bestimme den Bereich, den der Parameter t in der Schleife durchläuft. Drücke den Flächeninhalt mit dem Satz von Green durch ein Linienintegral aus.
Beachte auch, dass die Aussage von Teil a) kein Problem ist, denn wir brauchen nur irgendeine Parametrisierung und nicht eine solche, die als Graph einer Funktion gegeben ist.

10.3. Satz von Green III

Die Randkurve ∂B des Bumerangs B, (siehe die Zeichnung unten) kann parametrisiert werden durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [\,0, 2\pi).$$



Bestimme den Schwerpunkt von B.

Hinweis: Berechne das Integral

$$\int_B x \, dx \, dy$$

mit Hilfe eines geeignet gewählten Vektorfeldes $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mit $Q_x - P_y \equiv x$.
Benutze ferner die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\, dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t)\, dt = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.4. Online-Aufgaben

(a) Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{K}(x, y) = (2xy + 3x^2y + y^2, x^2 + x^3 + xy) = (P, Q)$ und die Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$. Berechne

$$\int_S P dx + Q dy$$

i) $-\frac{2}{3}$

ii) 0

iii) $\frac{2}{3}$