11.1. Das Potential I

Betrachte in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das Umlaufintegral

$$I := \int_\gamma K \cdot dx$$

um den Kreis γ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $M := \binom{0}{0}$.

(b) Zeige durch Konstruktion eines Potentials, dass K konservativ ist.

(c) Verifiziere durch explizite Rechnung, dass K die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$$

erfüllt.

Achtung: Vergleiche diese Aufgabe auch mit Aufgabe 11.3.

11.2. Satz von Green

Definiere das Vektorfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{K}(x, y) := \begin{pmatrix} \cos(x) + y \\ e^{y^2} - x^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s}$$

entlang des Einheitskreises $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

11.3. Linienintegral

Betrachte das Vektorfeld

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{S^1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s}$$

wobei $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = 1\}$, im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

(b) Begründen Sie, warum der Satz von Green in Teil (a) nicht angewendet werden kann.

11.4. Satz von Gauss

Gegeben seien das Dreieck

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\; | \;\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; x+y \leq 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$K := \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Berechne den Fluss von K durch den Rand ∂B von innen nach aussen

(a) als Flussintegral,

(b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

11.5. Online-Aufgaben

(a) Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

i) Das Vektorfeld $(x-y,\, x-y)$ hat ein Potential.

ii) Das Vektorfeld $(x^2-y,\, x^3+2xy)$ hat ein Potential.

iii) Das Vektorfeld $(x^3+2xy,\, x^2-y)$ hat ein Potential.

iv) Das Vektorfeld $(x^3-xy^2,\, x^2y-y^5)$ hat ein Potential.

(b) Das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (e^x \sin(y), e^x \cos(y))$ ist

i) nicht konservativ.

ii) konservativ.

(c) Die Divergenz des Vektorfelds

$$K(x,y) = \left(x^3 + \cos y, \frac{e^y + xy}{1+x^2}\right)$$

ist...

i) $x^3 + \cos y + \frac{e^y+xy}{1+x^2}$.

ii) $-\sin y + \frac{y-yx^2-2xe^y}{(1+x^2)}$.

iii) $x^3 + \cos y - \frac{e^y+xy}{1+x^2}$.

iv) $\frac{3x^2+3x^4+x+e^y}{1+x^2}$.

(d) Gegeben seien das Bereich

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; -1 < x < 1,\ 0 < y < -x^2+1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$K := \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + y \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Der Fluss von K durch den Rand ∂B von innen nach aussen ist...

i) 0.

ii) $-2/3$.

iii) -1.

iv) $2/5$.

v) $-2/5$.