12.1. Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

Seien f ein Skalarfeld und $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld ∇f.
Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die *Divergenz* von K ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}.$$

Formuliere und beweise koordinatenfreie Identitäten der Form

$$\operatorname{rot}(fK) = (\nabla f) \times K + f \cdot \operatorname{rot} K.$$

(a) $\operatorname{div}(fK) = \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K$

(b) $\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L$

(c) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \ \ldots$

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = \ \ldots$

(e) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) = \ \ldots$

12.2. Der Flächeninhalt

Berechne die Oberfläche des Teils der oberen Hemisphäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ z \geq 0 \right\},$$

der vom Zylinder

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$$

ausgeschnitten wird.

12.3. Der Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$

Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$, $G := \{(x_1, x_2, x_3) \in M \,|\, |x_3| \leq 1\}$ und $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie M und G.

(b) Berechnen Sie

$$\int_G \mathbf{K} \cdot d\omega$$

direkt mit der Definition.

(c) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe des Satzes von Gauss.

12.4. Online-Aufgaben

(a) Gegeben seien der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f\,.$$

Die Divergenz von v ist...

i) $a_1 x + a_2 y + a_3 z$.

ii) 0.

iii) $a_1 + a_2 + a_3$.

iv) 1.

(b) Seien a, f und v wie oben. Der Fluss von v durch die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung ist...

i) a_3.

ii) $\frac{4}{3}\pi$.

iii) 0.

iv) $a_1 + a_2 + a_3$.

v) π^2.

(c) Seien a, f und v wie oben. $\operatorname{rot} v$ ist...

i) a.

ii) $\frac{2}{3}a$.

iii) 0.

iv) ∇f.

v) $-\nabla f + v$.