Lösung - Schnellübung 12

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - 4)\, y' + \frac{1}{2}\, \lambda\, y = 0\,.$$

Für welche Werte des reellen Parameters λ gibt es eine von Null verschiedene Lösung $y(x)$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleibt?

Lösung: Man berechnet zuerst die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms $\mu^2 + (\lambda - 4)\mu + \frac{1}{2}\,\lambda = 0$ (in der Variablen μ). Diese sind

$$\mu = \frac{1}{2}\big(4 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda-4)^2 - 2\lambda}\,\big) = \frac{1}{2}\big(4 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda-5)^2 - 9}\,\big).$$

Bezeichnen wir durch μ_1 (bzw. μ_2) die Nullstelle mit $-$ (bzw. mit $+$). Hier unterscheiden wir drei Fälle:

- Wenn die Nullstelle(n) reell sind (d.h. wenn $\lambda \geq 8$ oder $\lambda \leq 2$), dann ist die allgemeine Lösung der Gleichung der Gestalt
$$y(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x},$$
wenn $\mu_1 \neq \mu_2$, oder
$$y(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 x e^{\mu_1 x},$$
wenn $\mu_1 = \mu_2$. Man bemerke $\mu_2 \geq \mu_1$; wenn $\mu_1 > 0$, bleibt also y für $x \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn $C_1 = C_2 = 0$. Anders gesagt: $\mu_1 \leq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung der Gleichung. Sie ist auch hinreichend, denn $y(x) = C_1 e^{\mu_1 x}$ für $C_1 \neq 0$ ist immer beschränkt und nicht Null, wenn $\mu_1 \leq 0$.

  Diese Bedingung können wir als Funktion von λ umformulieren, wie folgt:
$$\begin{aligned} \mu_1 \leq 0 &\iff \big(\lambda \geq 4 \quad \text{oder} \quad (\lambda-4)^2 \leq (\lambda-5)^2 - 9\big) \\ &\iff (\lambda \geq 4 \quad \text{oder} \quad \lambda \leq 0)\,. \end{aligned}$$
  Nach unserer Anfangsannahme (reelle Nullstellen) ist also $\mu_1 \leq 0$ genau dann, wenn $\lambda \geq 8$ oder $\lambda \leq 0$.
- Wenn die Nullstellen nicht reell und konjugiert sind (d.h. wenn $2 \leq \lambda \leq 8$), dann ist die allgemeine Lösung der Gestalt
$$y(x) = e^{\frac{4-\lambda}{2}x}\,(C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x)\,,$$
wobei $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{9 - (\lambda-5)^2}$ ist. Die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung dieser Gestalt ist genau dann garantiert, wenn $\frac{4-\lambda}{2} \leq 0$ ist, d.h. wenn $\lambda \geq 4$. Nach unserer Anfangsannahme (konjugierte komplexe Nullstellen) muss dann $4 \leq \lambda \leq 8$ sein.

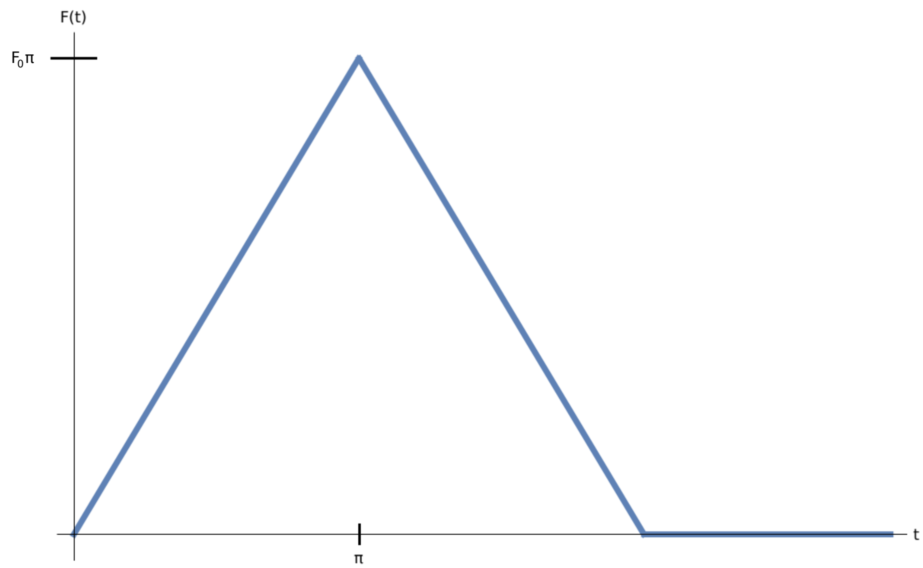
Die Bedingung ist also $\lambda \in (-\infty,\, 0] \cup [4, \infty)$.

2. Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblem

$$u'' + u = F(t)$$
$$u(0) = u'(0) = 0,$$

wobei F_0 eine Konstante ist und

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \leq t < \pi \\ F_0(2\pi - t), & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$



Lösung: Um die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zu bestimmen, müssen wir sie stückweise im Inneren der drei Definitionsintervalle von F. Dann benutzen wir die Differenzierbarkeit der Lösung u, um die Stücklösungen zusammenzukleben.

In jedem Stuck der Definition von F ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$u_h(t) = A\,\cos t + B\,\sin t$$

(denn das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ hat die zwei Nullstellen $\lambda = \pm i$). Für die partikuläre Lösung haben wir in den verschiedenen Stücken:

- In $(0,\,\pi)$: mit dem Ansatz $u_p(t) = \alpha t + \beta$ kann man leicht überprüfen, dass $u_p(t) = F_0 t$ die Gleichung löst.
- In $(\pi,\,2\pi)$: analog folgt $u_p(t) = F_0(2\pi - t)$.
- In $(2\pi,\,\infty)$ ist die Gleichung homogen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung muss also der Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} A_1\,\cos t + B_1\,\sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ A_2\,\cos t + B_2\,\sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi < t < 2\pi \\ A_3\,\cos t + B_3\,\sin t, & \text{wenn } t > 2\pi \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

sein, für Konstanten A_i, B_i. Da die Funktion $u : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich die Gleichung löst, muss sie mindestens zweimal differenzierbar sein. Insbesondere sind u und die Ableitung u' stetige Funktionen. Dies bestimmt die Konstanten $A_2,\ B_2,\ A_3,\ B_3$ als Funktionen von A_1 und B_1:

- Zuerst berechnen wir die Ableitung u':

$$u'(t) = \begin{cases} -A_1\ \sin t + B_1\ \cos t + F_0, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ -A_2\ \sin t + B_2\ \cos t - F_0, & \text{wenn } \pi < t < 2\pi \\ -A_3\ \sin t + B_3\ \cos t, & \text{wenn } t > 2\pi. \end{cases}$$

- Aus der Stetigkeit von u und u' an der Stelle $t = \pi$ folgt:

$$-A_1 + F_0\pi = \lim_{t\to\ \pi^-} u(t) = \lim_{t\to\ \pi^+} u(t) = -A_2 + F_0\pi, \text{ bzw.}$$

$$-B_1 + F_0 = \lim_{t\to\ \pi^-} u'(t) = \lim_{t\to\ \pi^+} u'(t) = -B_2 - F_0.$$

  Deshalb sind $A_1 = A_2$ und $B_2 = B_1 - 2F_0$.
- Aus der Stetigkeit von u und u' an der Stelle $t = 2\pi$ folgt:

$$A_2 = \lim_{t\to\ 2\pi^-} u(t) = \lim_{t\to\ 2\pi^+} u(t) = A_3, \text{ bzw.}$$

$$B_2 - F_0 = \lim_{t\to\ 2\pi^-} u'(t) = \lim_{t\to\ 2\pi^+} u'(t) = B_3.$$

  Deshalb sind $A_3 = A_2 = A_1$ und $B_3 = B_2 - F_0 = B_1 - 3F_0$.

Wir erhalten also:

$$u(t) = \begin{cases} A_1\ \cos t + B_1\ \sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ A_1\ \cos t + (B_1 - 2F_0)\ \sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi \le t < 2\pi \\ A_1\ \cos t + (B_1 - 3F_0)\ \sin t, & \text{wenn } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

Man soll bemerken, hier wurde wegen Stetigkeit von u auch $u(\pi) := \lim_{t\to\ \pi^-} u(t) = \lim_{t\to\ \pi^+} u(t)$ definiert. Analog wurde auch $u(2\pi)$ definiert.

Wir wenden jetzt die Anfangsbedingungen, um A_1 und B_1 zu bestimmen und somit unser Anfangswertproblem zu lösen:

- $0 = u(0) = \lim_{t\to 0^+} u(t) = A_1$.
- $0 = u'(0) = \lim_{t\to 0^+} u'(t) = B_1 + F_0$.

Die Lösung des Anfangswertproblemes ist dann:

$$u(t) = \begin{cases} -F_0\ \sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 \le t < \pi \\ -3F_0\ \sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi \le t < 2\pi \\ -4F_0\ \sin t, & \text{wenn } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2u''(r) = -ru'(r) + u(r) + 2r, \quad \text{wobei} \quad r > 0.$$

a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.

b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche für $r \to 0$ konvergieren.

Lösung:

a) Um die homogene Lösung dieser Eulerschen DGL zu finden, machen wir den Ansatz $u(r) = r^\alpha$. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL erhalten wir das Indexpolynom

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - r^\alpha \\ 0 &= \alpha^2 - \alpha + \alpha - 1. \\ \Longrightarrow \alpha &= \pm 1 \end{aligned}$$

Die homogene Lösung ist somit $u_h(r) = C_1r + C_2r^{-1}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz mit Variation der Konstanten, dh.

$$u_p(r) = C_1(r)r + C_2(r)r^{-1}.$$

Wie in Stammbach, Teil C, Kapitel 9 (b) fordern wir zusätzlich zur ursprünglichen Differentialgleichung noch

$$C_1'(r)r + C_2'(r)r^{-1} = 0. \tag{1}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} u_p' &= C_1'r + C_1 + C_2'r^{-1} - C_2r^{-2} = C_1 - C_2r^{-2}, \\ u_p'' &= C_1' - C_2'r^{-2} + 2C_2r^{-3}. \end{aligned}$$

Setzt man in die ursprüngliche Differentialgleichung (geteilt durch r^2) ein, erhält man

$$\begin{aligned} &C_1' - C_2'r^{-2} + 2C_2r^{-3} + C_1r^{-1} - C_2r^{-3} - C_1r^{-1} - C_2r^{-3} \\ =&C_1' - C_2'r^{-2} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man Gleichung (1) ergibt sich das Gleichungssystem

$$C_1'r + C_2'r^{-1} = 0, C_1' - C_2'r^{-2} = \frac{2}{r}.$$

Multiplizieren der zweiten Gleichung mit r und subtrahieren der ersten ergibt

$$-C_2'\frac{2}{r} = 2 \iff C_2' = -r.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung gibt $C_1' = 2/r + C_2'/r^2 = 1/r$. Durch Integration erhalten wir

$$C_1(r) = \ln(r) + C_{1,0}, C_2(r) = -\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$u(r) = (\ln(r) + C_{1,0})r + (-\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0})\frac{1}{r}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Bedingungen $u(1) = 0, u'(1) = 0$ sind erfüllt für

$$C_{1,0} - \frac{1}{2} + C_{2,0} = 0, C_{1,0} - (-\frac{1}{2} + C_{2,0}) = 0,$$

also $C_{1,0} = 0, C_{2,0} = 1/2$. Also folgt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(r) = \ln(r)r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r}.$$

b) Aus a) sieht man, dass die allgemeine Lösung der DGL geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} u(r) &= (\ln(r) + C_{1,0})r + (-\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0})\frac{1}{r} \\ &= C_1 r + C_2 r^{-1} + \ln(r)r, \end{aligned}$$

für $C_1 = C_{1,0} - \frac{1}{2}, C_2 = C_{2,0}$. Da $(\ln(r)r) \to 0$ für $r \to 0$, konvergiert diese Lösung für $r \to 0$ genau dann wenn $C_2 = 0$. D.h. die gesuchten Lösungen sind gegeben durch

$$u(r) = C_1 r + \ln(r)r \quad \text{mit } C_1 \in \mathbb{R}.$$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 3x$$

und zeigen Sie, dass sie nur eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung hat.

Lösung: Dies ist eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung. Die Lösung des homogenen Problems findet man mit Hilfe des Indexpolynoms.

$$\alpha(\alpha - 1) + 4\alpha + 2 = \alpha^2 + 3\alpha + 2 = (\alpha + 1)(\alpha + 2)$$

Die allgemeine Lösung lautet dann $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$. Für eine partikuläre Lösung drängt sich der Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = A\,x$ auf. Man findet $A = \frac{1}{2}$.

[Wer keinen passenden Ansatz für eine partikuläre Lösung findet, kommt mit dem Verfahren von Lagrange (Skript Kapitel VII S. 79/80) zum Ziel. Eine partikuläre Lösung ist von der Form $y_{\mathrm{p}}(x) = \gamma_1(x)\,x^{-1} + \gamma_2(x)\,x^{-2}$, wobei man $\gamma_1'(x)\,x^{-1} + \gamma_2'(x)\,x^{-2} = 0$ annehmen darf. Man erhält dann das System

$$\gamma_1'\,x^{-1} + \gamma_2'\,x^{-2} = 0 \tag{2}$$

$$-\gamma_1'\,x^{-2} - 2\gamma_2'\,x^{-3} = \frac{3}{x}\,. \tag{3}$$

Aus $(2) + x \cdot (3)$ bekommt man $-\gamma_2'\,x^{-2} = 3$ oder $\gamma_2' = -3x^2$ oder $\gamma_2(x) = -x^3$, und durch Einsetzen in (2) bekommt man $\gamma_1'\,x^{-1} - 3 = 0$ oder $\gamma_1' = 3x$ oder $\gamma_1(x) = \frac{3}{2}x^2$. Man erhält für die partikuläre Lösung $y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$.]

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{2}x\,.$$

Diese Lösung ist genau dann auf der ganzen reellen Achse definiert, wenn $C_1 = C_2 = 0$. Die gesuchte Lösung lautet so:

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{2}}$$

5. Eine Lösungskurve $y = u(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 3y' - 4y = 0$ schneidet eine Lösungskurve $y = w(x)$ der Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$ im Ursprung. An dieser Stelle haben beide Kurven die selbe Steigung. Bestimmen Sie die Funktionen u und w, wenn ausserdem die Bedingung

$$\lim_{x \to \infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}$$

erfüllt wird.

Lösung: Die charakteristischen Gleichungen der DGL $y'' - 3y' - 4y = 0$ und $y'' + 4y' - 5y = 0$ sind

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0.$$

Dann sind die gesuchten Integralkurven u und w der Gestalt

$$u(x) = A_1 e^{4x} + A_2 e^{-x}, \quad w(x) = B_1 e^{-5x} + B_2 e^{x}$$

für zu bestimmende Konstanten $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{R}$. Da beide Kurven durch den Ursprung durchgehen, sind

$$u(0) = A_1 + A_2 = 0 \text{ und } w(0) = B_1 + B_2 = 0.$$

Dies heisst $A_1 = -A_2$ und $B_1 = -B_2$. Somit hat man:

$$u(x) = A_1\left(e^{4x} - e^{-x}\right), \quad w(x) = B_1\left(e^{-5x} - e^{x}\right).$$

Da die Kurven die selbe Steigung im Ursprung haben, gilt $u'(0) = w'(0)$. Die Ableitungen von u und w sind

$$u'(x) = A_1\left(4e^{4x} + e^{-x}\right), \quad w'(x) = B_1\left(-5e^{-5x} - e^{x}\right)$$

Nach Auswertung auf $x = 0$ erhält man die Gleichung

$$5A_1 = -6B_1 \quad (1).$$

Wir untersuchen schliesslich die Bedingung des Limes, um die letzte benötigte Gleichung zu bekommen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(B_1\left(e^{-5x} - e^{x}\right)\right)^4}{A_1\left(e^{4x} - e^{-x}\right)} = \frac{B_1^4}{A_1} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{-6x} - 1\right)^4}{1 - e^{-5x}} = \frac{B_1^4}{A_1} = \frac{5}{6}.$$

Daraus folgt, dass $A_1, B_1 \neq 0$ sind und

$$6B_1^4 = 5A_1 \quad (2).$$

Es ergibt sich also aus (1) und (2), dass $B_1 = -1$ und $A_1 = \frac{6}{5}$ sind, und somit sind die gesuchten Integralkurven:

$$u(x) = \frac{6}{5}\left(e^{4x} - e^{-x}\right); \quad w(x) = e^{x} - e^{-5x}.$$