Lösung - Serie 16

1. Die Koordinatentransformation

$$
\begin{aligned}
x(u, v) &= 2v, \\
y(u, v) &= -2u
\end{aligned}
$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Die Transformation entspricht einer Stauchung um den Faktor 2 gefolgt von einer Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn. Folglich bleiben Kreise erhalten.

2. Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich I?

$\surd$ (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

$\surd$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

Das Integral (a) entsteht aus I durch Vertauschung der Variablen x und y. In (c) ist der Integrationsbereich durch dieselbe Bedingung wie bei I, nämlich $0 \leq y \leq x \leq 1$, gegeben. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein.

Um zu sehen, dass (b) nicht richtig ist, gibt es mehrere Möglichkeiten. *Möglichkeit 1:* Es wird über die Region $0 \leq x \leq y \leq 1$ integriert, der Integrand ist derselbe. Intuitiv stimmt (b) daher nicht. Eine Rechnung bestätigt dies:

$$\int_0^1 \int_0^y x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \int_0^y y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 [yx]_0^y \, \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Möglichkeit 2: Vertauschen wir die Variablen x und y, so hat das Integral die Form

$$\int_0^1 \int_0^x y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Es wird also beide Male über die Region $0 \leq y \leq x \leq 1$ integriert, einmal allerdings ist der Integrand gleich x, das andere Mal gleich y. Nun ist aber fast immer $y < x$, es muss also das Integral in (b) kleiner sein als I.

Siehe nächstes Blatt!

3. Es sei B ein Bereich in der (x, y)-Ebene und $\widetilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (ρ, φ)-Ebene. Welchem Integral entspricht $\int_B xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$?

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

√ (b) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

Die allgemeine Formel lautet

$$\int_B f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\widetilde{B}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi.$$

Also ist (b) richtig.

4. Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}F,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

√ (b) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

Beim dritten Integral wird über das Quadrat mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ integriert.

Bitte wenden!

5. Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2u + v, \\ y(u,v) &= u - 3v. \end{aligned}$$

a) Es bezeichne $\mathcal{R}$ das Einheitsquadrat in der xy-Ebene, also $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ der uv-Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

b) Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

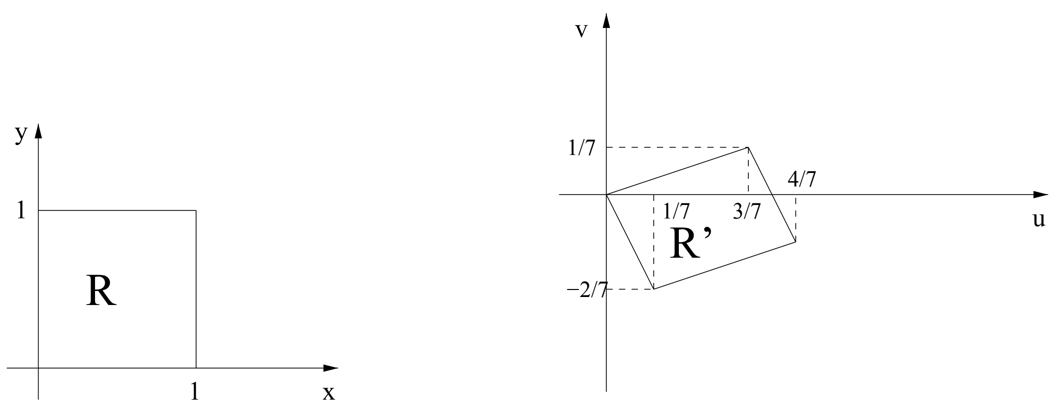
c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mathcal{R}}$.

Lösung:

a) Durch Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \tfrac{3}{7}x + \tfrac{1}{7}y, \\ v(x,y) &= \tfrac{1}{7}x - \tfrac{2}{7}y. \end{aligned}$$

Die vier Eckpunkte $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ des Einheitsquadrats in der xy-Ebene werden nun zu den vier Punkten $(0,0)$, $(1/7,-2/7)$, $(3/7,1/7)$ und $(4/7,-1/7)$ in der uv-Ebene. Da unter einer linearen Transformation Geraden erhalten werden, muss der Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ also folgende Form haben:



b) Es gilt

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Determinante gleich -7.

c) Die Fläche in der uv-Ebene ist 7-mal kleiner, also genau um den Faktor der Determinante der Matrix J.

Siehe nächstes Blatt!

6. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ in zwei Variablen ist der Laplace-Operator definiert als

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Nach einer Koordinatentransformation nimmt der Laplace-Operator in polaren Koordinaten die Form

$$f \equiv \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}, \tag{1}$$

wobei $\widetilde{f}(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ die Funktion f in polaren Koordinaten ist.

Sei nun $f : (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ eine zweimal differenzierbare Funktion in drei Variablen. Der Laplace-Operator von f ist

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

a) Berechnen Sie Δf für $f(x, y, z) = x^2 y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

b) Wie kann man die Formel aus (1) erweitern, um Δf in zylindrischen Koordinaten zu darstellen?

Bemerkung: Die zylindrische Koordinaten sind durch die Transformation

$$x(\rho, \varphi, z) = \rho \cos(\varphi), \quad y(\rho, \varphi, z) = \rho \sin(\varphi), \quad z(\rho, \varphi, z) = z,$$

gegeben, wobei $\rho > 0$, $\varphi \in [0, \pi/2]$ und $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

c) Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), Δf für

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2 + y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

Lösung:

a) Es gilt $f_x = 2xy + 2z^{-1} + z\cos(xz)$, $f_y = x^2$ und $f_z = -2xz^{-2} + x\cos(xz)$. Also gilt

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y - z^2 \sin(xz), \\ f_{yy} &= 0, \\ f_{zz} &= 4xz^{-3} - x^2 \sin(xz). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\Delta f = 2y + 4xz^{-3} - (x^2 + z^2)\sin(xz).$$

b) Sei $\widetilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$. Die Umkehrformeln für die Zylinderkoordinaten lauten

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z,$$

sofern $x > 0, y > 0$ (was den Fall ist, wenn $\varphi \in [0, \pi/2]$). Dann gilt $f(x, y, z) = \widetilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}, z)$. Mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f_x &= \widetilde{f}_\rho \cdot \rho_x + \widetilde{f}_\varphi \cdot \varphi_x + \widetilde{f}_z \underbrace{z_x}_{=0} = \widetilde{f}_\rho \cdot \rho_x + \widetilde{f}_\varphi \cdot \varphi_x, \\ f_y &= \widetilde{f}_\rho \cdot \rho_y + \widetilde{f}_\varphi \cdot \varphi_y + \widetilde{f}_z \underbrace{z_y}_{=0} = \widetilde{f}_\rho \cdot \rho_y + \widetilde{f}_\varphi \cdot \varphi_y, \\ f_z &= \widetilde{f}_\rho \underbrace{\rho_z}_{=0} + \widetilde{f}_\varphi \underbrace{\varphi_z}_{=0} + \widetilde{f}_z \underbrace{z_z}_{=1} = \widetilde{f}_z. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Mit der Produktregel und nochmals der verallgemeinerten Kettenregel bekommen wir

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \left(\widetilde{f}_{\rho\rho}\rho_x + \widetilde{f}_{\rho\varphi}\varphi_x\right)\rho_x + \widetilde{f}_\rho \rho_{xx} + \left(\widetilde{f}_{\varphi\rho}\rho_x + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\varphi_x\right)\varphi_x + \widetilde{f}_\varphi \varphi_{xx},\\
f_{yy} &= \left(\widetilde{f}_{\rho\rho}\rho_y + \widetilde{f}_{\rho\varphi}\varphi_y\right)\rho_y + \widetilde{f}_\rho \rho_{yy} + \left(\widetilde{f}_{\varphi\rho}\rho_y + \widetilde{f}_{\varphi\varphi}\varphi_y\right)\varphi_y + \widetilde{f}_\varphi \varphi_{yy},\\
f_{zz} &= \widetilde{f}_{zz}.
\end{aligned}$$

Da die Koordinatentransformationen $x(\rho,\varphi,z)$ und $y(\rho,\varphi,z)$ unabhängig von z und die selben wie im polaren Koordinaten Fall sind, der zwei Variablen Fall (1) gibt

$$f_{xx} + f_{yy} = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\Delta f = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi} + \widetilde{f}_{zz}.$$

c) In Zylinderkoordinaten haben wir $\widetilde{f}(\rho,\varphi,z) = \varphi z^{-1} - 2z\rho$. Also gilt

$$\widetilde{f}_\rho = -2z, \quad \widetilde{f}_{\rho\rho} = 0, \quad \widetilde{f}_\varphi = \frac{1}{z}, \quad \widetilde{f}_{\varphi\varphi} = 0, \quad \widetilde{f}_z = -\frac{\varphi}{z^2} - 2\rho, \quad \widetilde{f}_{zz} = \frac{2\varphi}{z^3}.$$

Folglich ist

$$\Delta f(x,y,z) = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi} + \widetilde{f}_{zz} = \frac{2\varphi}{z^3} - \frac{2z}{\rho}.$$

7. a) Berechnen Sie

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}F,$$

wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

b) Berechnen Sie

$$\iint_D xe^{x+y}\,\mathrm{d}F,$$

wobei $D = [0,1]\times[0,1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

c) Berechnen Sie

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}F,$$

wobei $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}F &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^2\left(1-x^6\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^8\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^9}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Es gilt

$$\iint_D xe^{x+y}\,\mathrm{d}F = \int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[e^{x+y}\right]_{y=0}^{y=1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(e^{x+1}-e^x\right)\,\mathrm{d}x.$$

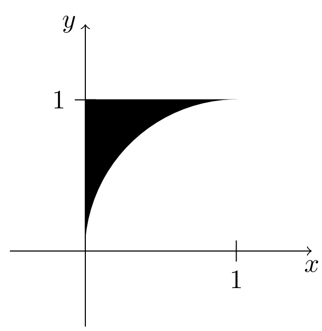
Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(e^{x+1}-e^x\right)\,\mathrm{d}x &= \left[x(e^{x+1}-e^x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(e^{x+1}-e^x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= e^2-e-\left[e^{x+1}-e^x\right]_{x=0}^{x=1} = e^2-e-(e^2-e-e+1) = e-1.\end{aligned}$$

c) Wir rechnen in Polarkoordinaten, setzen also $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ für $0 \le r \le 1$ und $0 \le \phi \le 2\pi$. Das Flächenelement berechnet sich dann als $\mathrm{d}F = r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$ und das gesuchte Integral ist gleich

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = -\pi\int_0^1 -2re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = -\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^1 = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

8. Sei $S = \{(x,y)\in[0,1]^2 : (x-1)^2+y^2 \ge 1\}$.



Berechnen Sie den Schwerpunkt von S.

Lösung: Sei F_S die Fläche von S. Da S ein Einheitsquadrat minus einen Viertelkreis von Radius 1 ist, gilt

$$F_S = 1-\frac{\pi}{4}.$$

Für die x-Koordinate x_S des Schwerpunkts gilt

$$\begin{aligned}F_S x_S &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^1 x dy dx \\ &= \int_0^1 (1-\sqrt{1-(x-1)^2})x dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}x dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2}(u+1) du \\ &= \frac{1}{2} - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2}u du - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} du.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Wir haben

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-u^2}du = \text{Fläche}(\text{Viertelkreis}) = \frac{\pi}{4}.$$

Andererseits gilt per Substitution $v = 1 - u^2$, dass

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-u^2}udu = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sqrt{v}dv = -\frac{1}{2}\frac{v^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$x_S = \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right) \approx 0.2234.$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der Geraden $y = 1 - x$, also gilt

$$y_S = 1 - x_S \approx 0.7766.$$